

مطالعه‌ی ساختارهای جبری با ابزارهای منطقی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
فرزاد علمی

اساتید راهنما: دکتر سعید صالحی پورمهر
دکتر رشید زارع نهندي

شهریور ۸۹

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به پدر و مادرم

قدردانی و تشکر

در اینجا جا دارد مراتب امتنان و تشکر خود را خدمت جناب دکتر سعید صالحی و جناب دکتر رشید زارع نهندی بخاطر زحمات و راهنمایی‌های سودمندشان ابراز نمایم. بویژه از جناب دکتر صالحی بخاطر ارائه‌ی کلاسهای بسیار سودمند و راهنمایی‌های بی‌بدیلشان در باب منطق و علوم کامپیوتر که مصداق حقیقی جمله‌ی کم، ولی رسید ی گوس بزرگ است، تشکر می‌نمایم.

فرزاد علمی شهریور ۸۹

چکیده

هدف این پایان نامه مطالعه روش هایی برای توصیف متناهی گروه هاست. به طوری که آن گروه با این توصیف در حد ایزومورفیسم به صورت یکتا مشخص گردد. به طور مشخص دو روش برای چنین توصیفی از گروه دلخواهی چون G به دست داده شده است.

الف — گروهی دلخواه چون G ، قابل نمایش به وسیله یک اتوماتون متناهی است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به وسیله دنباله هایی روی یک الفبای متناهی نمایش داد به طوری که مجموعه ی دنباله های نمایشی از اعضای گروه و به خصوص رابطه ی تساوی بین آنها را بتوان با یک اتوماتون متناهی آزمود و به علاوه عمل گروه نیز به ازای هر دو عضو از آن قابل تشخیص با این اتوماتون باشد.

ب — یک گروه نامتناهی با تولید متناهی، شبه متناهیاً اصل پذیر است اگر و فقط اگر با دانستن نامتناهی بودن و متناهی التولید بودن آن، جمله ی درجه اولی در زبان آن گروه چنان موجود باشد که آن را با تقریب یکرختی به صورت یکتا توصیف کند.

در پایان نامه سعی شده است، ابتدا شرح مختصری از اتوماتونهای متناهی برای نیل به قضایا و تعریف روش اول و مفاهیم منطقی برای نیل به قضایا و تعریف روش دوم ارائه شود. محدودیتها و پیچیدگی این دو روش نیز تا حدودی بررسی شده است.

منبع اصلی این پایان نامه مقاله ی زیر می باشد:

André Nies, Describing Groups, The Bulletin of Symbolic Logic,

Volume 13, Number 3, Sept. 2007, 305 – 339.

فهرست

چکیده	پنج
مقدمه	نه

۱ مقدماتی از منطق و علوم کامپیوتر

۱.۱	زبانها و اتوماتونهای متناهی و نامتناهی	۱
۱.۱.۱	زبانها	۱
۲.۱.۱	اتوماتونها	۲
۳	اتوماتونهای متناهی قطعی (DFA)	۳
۶	اتوماتونهای غیر قطعی (NFA)	۶
۶	زبانهای منظم و لم تزریق	۶
۲.۱	زبانهای مرتبه اول و ساخت های مربوط به آنها	۸
۱.۲.۱	زبانهای مرتبه اول	۸
۲.۲.۱	ساخت ها (مدلها)	۱۱

۱۲	تعریف پذیری یک رابطه در یک ساخت
۱۳	تعبیر پذیری یک ساخت در ساختی دیگر
۱۴	نظریه
۱۴	نظریه یک ساخت
۱۴	تصمیم پذیری
۱۵	اصل پذیری
۱۵	اصل پذیری متناهی
۱۷	رابطه بازگشتی
۱۸	محاسبه پذیری
۱۹	شمارش پذیر بازگشتیانه
۱۹	سلسله مراتب حسابی

۲ FA - نمایش پذیری

۲۰	۱.۲ FA - نمایش پذیری
۲۱	۱.۱.۲ قضایایی در باب ساختهای FA - نمایش پذیر
۲۵	۲.۲ FA - نمایش پذیری ضعیف
۲۶	۱.۲.۲ تعریف ω برای ساختی چون $\mathcal{A}$
۲۷	قضایایی در باب ساختهای ω
۳۲	FA - نمایش ناپذیری

۳۳	قضایای در باب ضعیفاً FA — نمایش پذیری
----	---

۳ ساختارهای جبری FA — نمایش پذیر

۳۵	۱.۳ قضایای FA — نمایش پذیری در باب گروههای آبلی
۳۹	۱.۱.۳ قضایای FA — نمایش پذیری در باب گروههای ناآبلی
۴۲	۲.۱.۳ قضایای FA — نمایش پذیری در باب حلقه‌ها و میدانها
۴۴	۲.۳ اتوماتون بوخی (Büchi)
۴۵	۱.۲.۳ ساخت‌های بوخی — نمایش پذیر
۴۶	۳.۳ پیچیدگی کلاس ساخت‌های FA — نمایش پذیر

۴ ساختارهای جبری شبه متناهیاً اصل پذیر

۴۹	۱.۴ گروههای شبه اصل پذیر
۵۵	۱.۱.۴ گروههای پوچ‌توان
۵۶	۲.۱.۴ حلقه‌های QFA
۵۹	مراجع

مقدمه

چگونه می توان یک گروه شمارش پذیر نامتناهی را به وسیله اطلاعات محدودی توصیف کرد؟

اولین راهی که به ذهن خطور میکند، ارائه ی یک نمایش متناهی از آن گروه است.

یک نمایش از یک گروه چون G عبارت است از دوتایی مرتب $(A, \mathfrak{N})$ که در آن A مجموعه ی مولدهای G و $\mathfrak{N}$ زیرمجموعه ای از گروه آزاد روی A است ($\mathfrak{N} \subseteq F[A]$) که e انگاشته می شوند. چون هر معادله در زبان یک گروه را می توان طوری بازنویسی کرد که یک طرف آن e (عضو همانی گروه) باشد، پس می توان $\mathfrak{N}$ را مجموعه ای از معادلات درست در G تلقی نمود. می توان ثابت نمود هر گروه دلخواه چون G دارای یک نمایش است. در واقع بدیهی ترین نمایش برای هر گروه آن است که مجموعه ی A را مجموعه ی همه ی اعضای G فرض کنیم و $\mathfrak{N}$ را مجموعه ی همه ی روابط درست در این گروه در نظر بگیریم. (که البته به صورت یک طرف e نوشته شده اند).

گروه G دارای نمایشی متناهی است اگر و فقط اگر اولاً A مجموعه ای متناهی باشد (به عبارت دیگر G متناهی التولید باشد) و ثانیاً $\mathfrak{N}$ مجموعه ای متناهی باشد (به عبارت دیگر G متناهیاً اصل پذیر باشد).

اما همه ی گروه ها، دارای نمایش متناهی نیستند. مثلاً خیلی از گروه ها، باتولید متناهی نیستند، به علاوه گروه های باتولید متناهی بسیاری وجود دارند که متناهیاً اصل پذیر نیستند. به علاوه مساله ای که هنوز حل نشده باقی مانده، و به مساله کلمه^۱ مشهور است، در این زمینه وجود دارد که سوالی در مورد دو نمایش مختلف از یک گروه است. آیا روشی کارآمد وجود دارد که بتواند تصمیم بگیرد که دو نمایش متناهی، یک گروه را توصیف می کنند یا خیر؟

آیا روشی کارآمد وجود دارد که با استفاده از نمایش متناهی از یک گروه تصمیم بگیرد که عضو مفروض x ، عضو همانی است یا خیر؟

به طور شهودی منظور از یک روش کارآمد، دستورالعملی مرحله به مرحله است که برای اجرای هر مرحله احتیاج به خلاقیت خاصی نداشته باشد. برای تدقیق این مفهوم شهودی مفاهیمی چون اتوماتون ها و ماشین های محاسبه معرفی شده است، که شرح مختصری از آنها در فصل مقدمات آمده است.

^۱ word problem

همانطور که در مورد نمایش متناهی یک گروه گفته شد، شرط دوم وجود یک نمایش متناهی برای گروهی چون G ، متناهیاً اصل پذیر بودن آن است، به طوری که آن گروه با این توصیف در حد یکریختی به صورت یکتا مشخص گردد. این همان چیزی است که این پایان نامه را به منطق و قضایای منطقی در مورد ساخت های متناهیاً اصل پذیر پیوند می دهد.

به طور مشخص دو روش برای چنین توصیفی از گروه دلخواهی چون G به دست داده شده است.

الف — گروهی دلخواه چون G ، قابل نمایش به وسیله یک اتوماتون متناهی است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به وسیله دنباله هایی روی یک الفبای متناهی نمایش داد به طوری که مجموعه ی دنباله های نمایشی از اعضای گروه و به خصوص رابطه ی تساوی بین آنها را بتوان با یک اتوماتون متناهی آزمود و به علاوه عمل گروه نیز به ازای هر دو عضو از آن قابل تشخیص با این اتوماتون باشد.

ب — یک گروه نامتناهی با تولید متناهی، شبه متناهیاً اصل پذیر است اگر و فقط اگر با دانستن نامتناهی بودن و با تولید متناهی بودن آن، جمله ی درجه اولی در زبان آن گروه چنان موجود باشد که آن را با تقریب یکریختی به صورت یکتا توصیف کند.

این پایان نامه به چهار فصل تقسیم شده است. در فصل اول، به معرفی و تعریف مفاهیمی می پردازیم که برای درک قضایا و مفاهیم بخش های اصلی این پایان نامه ضروری به نظر می رسند. در این فصل برای روشن شدن این مفاهیم مثالها و قضایایی آورده شده که کلید فهم مثالها و قضایای بخش های بعدی خواهند بود و پیوسته به آنها رجوع خواهد شد.

در فصل دوم، به تشریح روش الف برای توصیف گروه ها، ولی در مقیاسی گسترده تر، دست زده ایم. یعنی مفاهیم و قضایای نمایش پذیری توسط یک اتوماتون، برای ساخت ها (که دایره ی آنها بسیار وسیع تر از گروه هاست) توضیح داده شده است.

در فصل سوم، با استفاده از قضایای عمومی که برای ساخت ها مطرح کرده ایم، قضایایی در مورد ساختارهای جبری و به خصوص گروه ها مطرح شده است و پیچیدگی گروه هایی که به این روش قابل توصیف اند، بررسی شده است.

در فصل چهارم، به تشریح روش ب برای توصیف گروه ها، یعنی صورت بندی منحصر به فرد یک گروه با شرایط توضیح داده شده، پرداخته ایم.

فصل اول

مقدماتی از منطق و علوم کامپیوتر

۱.۱ زبانها و اتوماتونهای متناهی و نامتناهی

۱.۱.۱ زبانها

مجموعه‌ی غیر تهی و متناهی Σ از نمادها را به عنوان الفبا در نظر بگیرید. به هر دنباله متناهی از نمادهای Σ یک کلمه روی Σ می‌گویند.

مجموعه تمام کلمات روی Σ را با Σ^* نمایش می‌دهند. اتصال کلمه‌ی V به کلمه‌ی U ، دنباله ایست که از پیوستن دنباله V به انتهای راست U بدست می‌آید و آنرا با UV نمایش می‌دهیم. دنباله‌ای به طول صفر روی هر الفبای دلخواه را کلمه تهی می‌نامند و معمولاً آنرا با λ نمایش می‌دهند.

طول هر کلمه مثل U در واقع طول دنباله ایست که U نماد آن است و آنرا با $|U|$ نمایش می‌دهیم. به طور مثال واضح است که $|\lambda| = 0$ و اگر $U = abca$ باشد آنگاه $|U| = 4$ است، یا به طور مثال $|UV| = |U| + |V|$.

یک زبان چون $\mathcal{L}$ زیر مجموعه‌ای از Σ^* است. اگر کاردینال $\mathcal{L}$ متناهی باشد $\mathcal{L}$ را یک زبان متناهی و اگر نامتناهی باشد آنرا یک زبان نامتناهی می‌نامیم. چون زبانها مجموعه هستند، عملیات اجتماع، اشتراک و تفاضل برای آنها قابل تعریف است.

متمم زبان $\mathcal{L}$ عبارتست از مجموعه‌ی همه دنباله‌های متناهی از اعضای Σ که در $\mathcal{L}$ نیست. یعنی $\bar{\mathcal{L}} = \Sigma^* - \mathcal{L}$. اتصال دو زبان $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 = \{UV \mid U \in \mathcal{L}_1, V \in \mathcal{L}_2\}$$

$\mathcal{L}^n$ به معنی n بار اتصال $\mathcal{L}$ به خودش است. و برای $\mathcal{L}^0$ داریم $\mathcal{L}^0 = \{\lambda\}$

۲.۱.۱ اتوماتونها

اتوماتونها در واقع صورتبندی از ماشینهای محاسباتی هستند که می‌توانند الگوریتم‌هایی که به صورت شفاهی در زبانهای طبیعی چون فارسی و انگلیسی بیان می‌شوند را دنبال نمایند.

به عبارت دیگر اتوماتونها مدل‌های انتزاعی از کامپیوتر هستند به طوری که هر اتوماتون مخصوص تعقیب یک الگوریتم خاص طراحی می‌شود. همه اتوماتونها دارای مکانیزمی برای خواندن ورودی هستند. فرض می‌شود که این ورودی رشته‌ای از الفبای داده شده است که روی یک فایل ورودی نوشته شده است.

اتوماتون می‌تواند فایل ورودی را بخواند ولی نمی‌تواند آنرا تغییر دهد. فایل ورودی به سلولهایی تقسیم شده و هر سلول یک نشانه از الفبا را می‌تواند در خود جای دهد. فایل ورودی از چپ به راست و هر بار یک نشانه خوانده می‌شود. مکانیزم خواندن می‌تواند انتهای ورودی را تشخیص دهد و نوعاً در هر مرحله از خواندن می‌تواند خروجی (که لزوماً در الفبای کلمه ورودی نیست) تولید نماید. به صورت کلی اتوماتونها (و نه اتوماتونهای متناهی که در این پایان نامه با آنها سروکار داریم) می‌توانند دارای حافظه‌ی موقت باشند، که دارای تعداد نامتناهی سلول است و هر کدام می‌توانند یک نشانه از الفبا را در خود جای دهند. اتوماتون دارای وضعیتهای (حالات) داخلی ای است که در هر زمان (در هر مرحله) می‌تواند در یکی از این وضعیتهای باشد.

اتوماتون با خواندن یک حرف از ورودی و با توجه به حالتی که در آن قرار دارد و نیز اگر دارای حافظه باشد، با توجه به محتوای آن، وضعیت بعدی خود را تعیین می کند. تغییر از یک حالت به حالت بعدی را یک مرحله و یا یک حرکت می نامند. دست آخر آنکه اتوماتونها به دودسته ی قطعی و غیر قطعی تقسیم می شوند. اگر تغییر وضعیت یک اتوماتون توسط یک تابع صورت گیرد، یعنی در هر مرحله با معلوم بودن وضعیتی که اتوماتون در آن قرار دارد و نیز معلوم بودن ورودی که خوانده می شود، وضعیت بعدی به صورت منحصر به فرد تعیین شود، آنگاه آن اتوماتون را قطعی (معین) می گوئیم. در غیر این صورت یعنی اتوماتونهایی که تغییر وضعیت در آنها توسط یک رابطه (و نه لزوماً یک تابع) صورت می گیرد را اتوماتونهای غیر قطعی (نامعین) می گویند.

اتوماتونهای متناهی قطعی (DFA)

همانطور که قبلاً اشاره شد، یک اتوماتون متناهی قطعی^۱، اتوماتونی است که دارای حافظه موقت نیست بنابراین این نوع اتوماتونها در پیاد آوردن اطلاعات در طول محاسبه مشکل دارند و مقدار کمی اطلاعات را و آن هم به صورت قرار گرفتن در یک وضعیت داخلی می توانند به خاطر بسپارند و ضمناً تعداد وضعیتهای (حالات) آن ها نیز متناهی است.

یک اتوماتون قطعی به وسیله شش تایی $M = (Q, \Sigma, D^*, \delta, q_0, F)$ تعریف می شود که در آن:

Q : مجموعه ای متناهی است که مجموعه وضعیتهای اتوماتون را مشخص می کند.

Σ : مجموعه ای متناهی از نشانه ها است که مجموعه الفبای ورودی را معین می کند.

D : مجموعه ای متناهی از نشانه ها است که الفبای خروجی نامیده می شوند. توجه داشته باشید که اتوماتونهایی که خروجی تولید نمی کنند و به آنها پذیرنده ی متناهی گفته می شود، این مجموعه را ندارد.

δ : تابع تغییر حالت که به صورت $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times D$ مشخص می شود.

q_0 : عضوی از Q است که اتوماتون همواره از این حالت شروع به کار می کند.

F : زیر مجموعه ای از حالات که وضعیتهای پذیرش نهایی نامیده می شوند، بدین معنی که اگر در انتهای

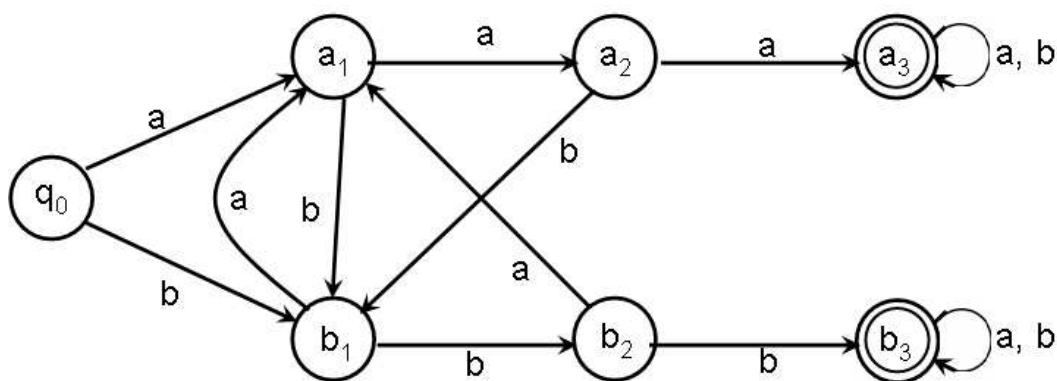
^۱ Deterministic Finite Automata

پردازش یک کلمه، اتوماتون در یکی از این وضعیت‌ها قرار داشته باشد، پردازش به درستی انجام شده است.

مثال ۱.۱.۱: مثلاً اتوماتونی را در نظر بگیرید که الفبای کلمات ورودی آن $\Sigma = \{a, b\}$ باشد و تمام کلماتی

را که دارای حداقل سه a ی پشت سر هم یا سه b ی پشت سر هم باشند را پذیرش کند. طرح این اتوماتون را با گراف زیر نمایش می‌دهیم. این گراف در واقع معرف تابع δ برای این اتوماتون است.

در این اتوماتون $\Sigma = \{a, b\}$ و مجموعه وضعیت‌های این اتوماتون به صورت $Q = \{q_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$



شکل ۱-۱: مثالی از یک اتوماتون قطعی

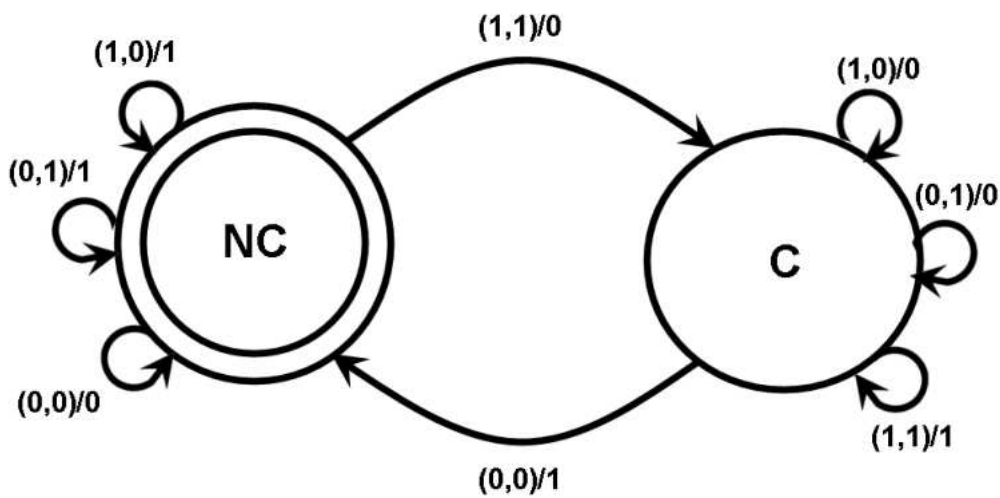
است. این اتوماتون خروجی تولید نمی‌کند، پس همانطور که قبلاً گفته شد الفبای خروجی یعنی D را ندارد و در واقع یک پذیرنده‌ی متناهی است.

$q_0 \in Q$ حالت ابتدایی این اتوماتون است یعنی حالتی که اتوماتون زمانی که هنوز هیچ ورودی را نخوانده در آن قرار دارد. در این اتوماتون $\mathcal{F} = \{a_3, b_3\} \subset Q$ است و نشان می‌دهد که اگر در انتهای زنجیره محاسباتی روی یک کلمه ورودی، اتوماتون در حالت a_3 یا b_3 باشد این اتوماتون آن کلمه را می‌پذیرد. به طور مثال برای این اتوماتون زنجیره محاسباتی روی کلمه $abba$ به صورت زیر است:

ابتدا اتوماتون در حالت q_0 قرار دارد. با خواندن اولین حرف ورودی (یعنی a) این اتوماتون به حالت a_1 می‌رود. $(\delta(q_0, a) = a_1)$ سپس این اتوماتون با خواندن حرف بعدی از این کلمه (یعنی b) به حالت b_1 می‌رود $(\delta(a_1, b) = b_1)$ با خواندن b بعدی از کلمه ورودی اتوماتون به حالت b_2 و با خواندن آخرین حرف این کلمه

یعنی a به حالت a_1 می رود. در اینجا کلمه تمام می شود در حالیکه اتوماتون در وضعیت a_1 که جزء وضعیتهای پذیرش نهایی این اتوماتون نیست، قرار دارد. پس اتوماتون این کلمه را نمی پذیرد. می توان این زنجیره محاسبات و تغییر وضعیتها را به طور خلاصه به صورت $\delta(q_0, abba) = a_1$ نمایش داد. با دنبال کردن روش گفته شده در بالا برای کلمه $abba$ می توان نشان داد که $\delta(q_0, abbbba) = b_3$ چون این بار اتوماتون در نهایت در b_3 که یکی از حالات پذیرش نهایی است قرار می گیرد، این اتوماتون کلمه $abbbba$ را می پذیرد.

مثال ۲.۱.۱: مثالی دیگر از اتوماتونهای قطعی با خروجی، اتوماتون نمایش داده شده با گراف زیر است که دو عدد باینری n بیتی را گرفته و یک عدد n بیتی را به عنوان جمع این دو تولید می کند.



شکل ۱-۲: اتوماتون قطعی با خروجی، که دو عدد طبیعی را با هم جمع می کند.

این اتوماتون عدد باینری b را که به صورت $\overline{b_{n-1} \dots b_1 b_0}$ و عدد باینری a که به صورت $\overline{a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ است را از راست به صورت زوج مرتب های (a_i, b_i) می خواند و براساس رقم نقلی که از جمع جفت بیت های قبلی حاصل شده، جمع این دو بیت را در خروجی تولید می کند. اگر بعد از جمع این n بیت این اتوماتون در حالت NC ($No \text{ Carry}$) باشد این جمع بدرستی یعنی بدون سرریز^۲ در n بیت صورت گرفته است. ولی اگر در انتهای جمع بیتهای آخر a و b اتوماتون در حالت C قرار داشته باشد ($Carry$) یعنی سرریز صورت گرفته و این جمع نه در n بیت بلکه در $n+1$ بیت قابل نمایش است و در نتیجه جمع به درستی در n بیت صورت نگرفته است. مجموعه حالات این اتوماتون (Q) عبارتست از $\{NC, C\}$.

^۲ Over flow

الفبای ورودی آن $\Sigma = \{0, 1\}$ و الفبای خروجی آن $\mathcal{D} = \{1, 0\}$ است. تابع δ از گراف این اتوماتون قابل حصول است. وضعیت اولیه این اتوماتون یعنی q_0 همان وضعیت NC و وضعیت نهایی یا پذیرش آن نیز $\mathcal{F} = \{NC\}$ است.

اتوماتونهای غیر قطعی (NFA)

اتوماتونهای غیر قطعی^۲ نیز دقیقاً مانند اتوماتون های قطعی هستند. با این تفاوت که در آنها تابع $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \mathcal{D}$ جای خود را به رابطه $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q \times \mathcal{D}$ می دهد. می توان نشان داد که هر (NFA) رامیتوان به صورت کارآمدی (الگوریتم وار) به یک (DFA) تبدیل نمود و بنابراین ما از بررسی آن در اینجا چشم پوشی می کنیم.

زبانهای منظم و لم تزریق

اتوماتون $\mathcal{M}$ را در نظر بگیرید. زبان این اتوماتون تمام کلماتی روی الفبای ورودی است که این اتوماتون را در نهایت در یکی از حالات پذیرش خود قرار می دهند. یعنی برای $\mathcal{M} = (\Sigma, \mathcal{D}^*, \delta, q_0, \mathcal{F})$ داریم :

$$\mathcal{L}_M = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in \mathcal{F}\} = \mathcal{M} \text{ زبان مربوط به اتوماتون}$$

{ همه کلماتی روی الفبای Σ که اتوماتون با اعمال محاسبه روی آنها در نهایت در یکی از وضعیتهای پذیرش نهایی خود قرار می گیرد}.

به زبان $\mathcal{L}$ که توسط یک اتوماتون متناهی پذیرفته شود زبانی منظم گفته می شود. به عبارت دیگر زبان $\mathcal{L}$ منظم است اگر و فقط اگر اتوماتون متناهی وجود داشته باشد که با شروع از وضعیت q_0 خود و تحت محاسبه روی هر یک از کلمات متعلق به زبان $\mathcal{L}$ در نهایت در وضعیت پذیرش نهایی قرار گیرد.

واضح است که هر زبان متناهی منظم است. برای درک این مطلب می توان اتوماتونی را در نظر گرفت که دارای

^۲ Non-deterministic Finite Automata

دو وضعیت Acc و Rej است که به ترتیب وضعیت‌های پذیرش و رد هستند. q_0 این اتوماتون Acc و $\mathcal{F}$ این اتوماتون را نیز $\{Acc\}$ در نظر می‌گیریم. این اتوماتون به ازای تمام کلمات $\mathcal{L}$ به حالت Acc و در غیر این صورت به حالت Rej می‌رود.

اما در مورد زبان‌های منظم نامتناهی لم زیر را داریم:

لم تزریق :

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان منظم نامتناهی باشد که توسط اتوماتونی چون $\mathcal{M}$ که دارای n وضعیت داخلی است پذیرفته می‌شود ($|Q| = n$) و نیز فرض کنید که این زبان شامل کلمه‌ای مثل w که دارای طولی بزرگتر یا مساوی n است، باشد. ($|w| \geq n$). چون $\mathcal{L}$ نامتناهی است، حتماً دارای چنین w ‌ای هست. در این صورت تجزیه‌ای چون $w = xyz$ برای کلمه w وجود دارد که در آن $|xy| \leq n$ و $|y| \geq 1$ به طوری که $w_i = xy^iz$ به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ در زبان $\mathcal{L}$ باشد.

برای اثبات این مطلب فرض کنید که این DFA دارای وضعیتهای $q_0, \dots, q_{n-1}$ باشد. حال کلمه‌ی w که طبق فرض اندازه‌ی آن بزرگتر یا مساوی n است، را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی وضعیت‌هایی را که اتوماتون حین پردازش w از آنها می‌گذرد را در نظر بگیرید و فرض کنید این ترتیب به صورت $q_0, \dots, q_i, \dots, q_f$ باشد. چون این ترتیب حداقل دارای $n+1$ وضعیت است (چون طول کلمه‌ی w بزرگتر مساوی n است)، طبق اصل لانه کبوتری لااقل یک وضعیت باید تکرار شود. به این معنی که این اتوماتون متناهی حداکثر پس از m حرکت به یک وضعیت قبلی باز می‌گردد.

یعنی این ترتیب باید به صورت $q_0, \dots, q_r, \dots, q_r, \dots, q_f$ باشد.

$$\underbrace{q_0, q_i, \dots, q_r, \dots, q_r, \dots, q_f}_{x} \quad \underbrace{\quad}_{y} \quad \underbrace{\quad}_{z}$$

همان طور که در بالا نمایش داده شده کلمات x و y و z را چنان انتخاب می‌نماییم که $\delta(q_0, x) = q_r$ و $\delta(q_r, y) = q_r$ و $\delta(q_r, z) = q_f$ داریم: $|xy| \leq n$ و نیز واضح است که $|y| \geq 1$ ، یعنی y کلمه‌ی تهی نیست، ولی ممکن است z کلمه‌ی تهی باشد. براحتی می‌توان دید که این دور زدن حالت ماشین درپروسه‌ی پردازش y را از هر مرتبه می‌توان تکرار کرد. چون $\delta(q_r, y) = q_r$ پس $\delta(q_r, yy) = q_r$ و نیز $\delta(q_r, yyy) = q_r$ و قس علی

هذا. یعنی برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم: $\delta(q_r, y^i) = q_r$. پس $\delta(q_0, xy^iz) = q_f$ و چون $q_f \in \mathcal{F}$ (چراکه طبق فرض w کلمه ای است که توسط این اتوماتون پذیرفته میشود) پس هر w_i عضو این زبان منظم است. مثلاً زبان $\mathcal{L} = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ منظم نیست.

اثبات: فرض کنیم که این زبان زبانی منظم باشد، پس توسط یک اتوماتون متناهی بامثالاً تعداد وضعیتهای داخلی k پذیرفته می شود. مشخص است که $w = a^k b^k$ عضو این زبان است. چون $w \in \mathcal{L}$ و $|w| \geq k$ پس طبق لم تزریق تجزیه ای برای w به صورت $w = xyz$ با شرایط $|xy| \leq k$ و $|y| \geq 1$ وجود دارد که به ازای هر i ، $w = xy^iz$ عضوی از $\mathcal{L}$ است. پس اگر $xy = a^s$ را در نظر بگیریم بطوری که داریم $1 \leq r \leq s \leq k$ ، $y = a^r$ و $x = a^{s-r}$ و $z = a^{k-s} b^k$. طبق لم تزریق $w_0 = xy^0 z = xz$ نیز عضو $\mathcal{L}$ است یعنی $w_0 = a^{k-r} b^k$ عضو $\mathcal{L}$ است که واضحاً این طور نیست و فرض اولیه مبنی بر منظم بودن این زبان غلط است.

۲.۱ زبانهای مرتبه اول و ساخت های مربوط به آنها

۱.۲.۱ زبانهای مرتبه اول

هر عبارت در یک زبان مرتبه اول، دنباله متناهی از نمادهای مرتبه اول آن زبان است که قواعد خاصی (گرامر زبان) در آنها رعایت شده باشد. در اینجا ما ابتدا به تشریح نمادهای یک زبان مرتبه اول می پردازیم و سپس به طور اجمالی قواعد زبان و چگونگی رعایت آنها را توضیح می دهیم.

نمادهای یک زبان مرتبه اول: به طور کلی این نمادها به دو دسته ی ۱- نمادهای منطقی و ۲- نمادهای پارامتری تقسیم می شوند.

نمادهای منطقی: نمادهای منطقی در همه زبانهای مرتبه اول مشترکند و عبارتند از: پرانتزها، نمادهای ربطی

جمله ای $(\rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \wedge, \vee)$ ، متغیرهای زبان که معمولاً تعداد آنها را شمارش پذیر در نظر می گیرند و سرانجام نماد تساوی که وجود آن اختیاری است. اگرچه این نماد در واقع یک نماد محمولی دو موضعی است ولی با آنها متفاوت است چراکه یک نماد منطقی به حساب می آید و نه یک نماد پارامتری (این وضع در ترجمه این نماد به فارسی مؤثر خواهد بود).

نمادهای پارامتری:

شامل نمادهای سوری ($\forall$ و $\exists$ وجودی)، نمادهای محمولی (نمادهای رابطه ای)، نمادهای تابعی و نمادهای ثوابت هستند.

بعضی از عبارتها را نمی توان ترجمه ی هیچ جمله ی با معنی فارسی دانست و در واقع مهملائی بیش نیستند. مانند $(\exists \rightarrow x)$.

می خواهیم فرمولهای خوش ساخت عبارتهایی باشند که ساخت دستوری درستی دارند. (به طور شهودی یعنی بتوان برای آن ها ترجمه ای مناسب در زبان طبیعی به دست آورد). بنابراین باید برای این عبارتها تعریفی به دست دهیم که عبارتهای غیر دستوری حذف شوند.

ابتدا از تعریف ترما (نام اشیاء مورد بحث یا ضمائر آنها) شروع می کنیم. هر نماد ثابت یا نماد متغیر، یک ترم است. بعلاوه به ازای هر نماد تابعی n موضعی $\mathcal{F}$ و ترماهای t_1 تا t_n در زبان مورد نظر، $\mathcal{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ نیز ترمی از این زبان است. این تعریف، یک تعریف استقرائی برای مجموعه ی ترماهای این زبان ارائه می دهد. این تعریف را در یک جمله می توان چنین بیان نمود که: مجموعه ترماهای یک زبان درجه اول، مجموعه ی پدید آمده از نماد ثوابت و متغیرهای آن زبان بوسیله ی نمادهای تابعی این زبان است.

مثال ۱.۲.۱: زبانی با نمادهای زیر را در نظر بگیرید: ۱- این زبان شامل تساوی هست. ۲- پارامترهای این زبان عبارتند از: ۱- یک نماد تابعی یک موضعی S ، ۲- یک نماد تابعی دو موضعی $+$ ، ۳- یک نماد ثابت $\circ$ و ۴- یک نماد محمولی دو موضعی $\leq$.

عبارت های $x, S(x), S(x) + S(\circ), S(S(x))$ همه جزء ترماهای این زبان هستند، ولی $S((x) + \circ)$ جزء ترماهای این زبان نیست، چون نمی توان آنرا به صورت استقرائی از مجموعه نمادهای ثوابت (که در اینجا $\{\circ\}$)

می باشد) و نمادهای متغیر با استفاده از نمادهای تابعی (که در اینجا $\{S, +\}$ هستند) بدست آورد. بعلاوه $S(S(\circ)) = S(x)$ نیز یک ترم از این زبان نیست، چراکه در این فرمول از نماد $=$ استفاده شده که نه نماد تابعی و نه نماد ثابت یا متغیر است.

فرمولهای اتمی (فرمولهای بسیط) :

به ازای هر نماد محمولی n موضعی $\mathfrak{R}$ و ترمهای t_1 تا t_n از یک زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ ، $\mathfrak{R}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ یک فرمول اتمی است. مثلاً در مثال ۱.۲.۱، $x \leq y$ یک فرمول بسیط است یا $x = S(y)$ یک فرمول بسیط است ولی $(x \leq S(\circ)) \rightarrow (x = S(\circ))$ یک فرمول بسیط نیست چون در آن از علامت منطقی $\rightarrow$ استفاده شده که نه یک ترم است و نه یک نماد محمولی.

فرمولهای خوش ساخت :

مجموعه $\mathfrak{B}$ ، شامل همه فرمولهای اتمی یک زبان درجه اول مثل $\mathcal{L}$ را در نظر بگیرید. مانند قبل تعریف استقرائی برای فرمول خوش ساخت از یک زبان درجه اول ارائه می دهیم.

مجموعه پدید آمده از $\mathfrak{B}$ توسط نمادهای منطقی و سورهای وجودی و عمومی را مجموعه فرمولهای خوش ساخت $\mathcal{L}$ می نامیم. این بدین معنی است که اگر α و β دو فرمول اتمی از زبان درجه اول $\mathcal{L}$ باشند، آنگاه $\alpha \rightarrow \beta$ ، $\alpha \leftrightarrow \beta$ ، $\alpha \wedge \beta$ ، $\alpha \vee \beta$ ، $\neg \alpha$ ، $\exists x \alpha$ ، $\forall x \alpha$ همگی فرمولهای خوش ساخت زبان $\mathcal{L}$ هستند.

به طور مثال در مثال ۱.۲.۱ $\exists x \quad x = S(y)$ یک فرمول خوش ساخت است چراکه $\alpha : x = S(y)$ یک فرمول اتمی است پس $\exists x \alpha$ طبق تعریف یک فرمول خوش ساخت است. یا $(x \leq S(\circ)) \rightarrow (x = S(\circ))$ نیز یک فرمول خوش ساخت است.

جمله :

یک فرمول خوش ساخت را یک جمله می نامیم اگر هیچ یک از متغیرهای بکار رفته در آن بدون سور نباشند. به متغیرهایی که در یک فرمول خوش ساخت مقید به سوری نباشند متغیر آزاد گفته می شود. مثلاً در زبان شرح داده شده در مثال ۱.۲.۱ در فرمول $\exists x \quad x \geq S(y)$ ، x متغیر مقید و y متغیر آزاد است.

۲.۲.۱ ساخت ها (مدلها)

ساختها در واقع ترجمه کنندگان زبان صوری به یک زبان طبیعی (مثلاً فارسی) هستند. یک ساخت برای یک زبان مرتبه اول معلوم می کند که: ۱- نمادهای سور عمومی و وجودی به چه دسته از اشیاء اشاره می کنند. ۲- پارامترهای دیگر زبان یعنی نمادهای ثابت، محمولی و تابعی بیانگر چه هستند. به طور صوری یک ساخت $\mathcal{M}$ برای یک زبان مرتبه اول تابعی است که دامنه ی آن مجموعه پارامترهای زبان است بطوریکه:

۱- $\mathcal{M}$ به نمادهای سوری $\exists, \forall$ یک مجموعه ی غیر تهی $|M|$ را که عالم سخن نامیده می شود را نسبت می دهد.

۲- $\mathcal{M}$ به هر نماد محمولی n موضعی R رابطه n تایی مانند $|M|^n \subseteq R$ را نسبت می دهد. یعنی $R \in \mathcal{M}^M$ ای از n تاییهایی از عالم سخن است.

۳- $\mathcal{M}$ به هر نماد ثابت c یک عضو چون c^M از عالم سخن یعنی $|M|$ را نسبت می دهد.

۴- $\mathcal{M}$ به هر نماد تابعی n موضعی مانند f یک عمل n تایی مثل f^M را روی $|M|$ نسبت می دهد، یعنی $|M|^n \rightarrow |M| : f^M$.

توجه کنید که فرضهای اساسی ما غیر تهی بودن عالم سخن $(|M|)$ و کلی بودن تابع f^M است. یعنی دامنه ی f^M باید همه ی $|M|^n$ باشد.

مثال ۲.۲.۱۱: زبان مشروح در مثال ۱.۲.۱ را در نظر بگیرید. یک ساخت $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ برای این زبان به صورت زیر است:

۱- $|\mathcal{M}_{\mathbb{N}}|$: عالم سخن در این مثال مجموعه اعداد طبیعی یا $\mathbb{N}$ است.

۲- نماد تابعی S به تابع تالی اشاره دارد و نماد تابعی دو متغیره ی $+$ ، همان جمع اعداد طبیعی است.

۳- نماد محمولی دو موضعی $\leq$ ، همان رابطه ترتیب معمولی در $\mathbb{N}$ است.

۴- نماد 0 همان صفر اعداد طبیعی است.

ما معمولاً یک ساخت را بدون معرفی زبانی که آن ساخت بدان اشاره دارد معرفی می کنیم، چرا که از روی توابع، روابط و ثوابتی که یک ساخت معرفی می کند، می توان به زبان مربوط به آن پی برد. مثلاً می نویسیم $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, \leq, +, S, 0)$ و منظورمان همان ساخت توضیح داده شده در بالاست. زبان این ساخت مشخصاً

متشکل از یک نماد محمولی دو موضعی $\leq$ و نمادهای تابعی یک موضعی S و دو موضعی $+$ و ثابت $\circ$ است.

حال با استفاده از یک ساخت برای یک زبان مرتبه اول می توانیم مشخص کنیم که چه جملاتی در زبان $\mathcal{L}$ در این ساخت درست است و چه جملاتی غلط هستند. مثلاً جمله $\forall x \exists y x \leq y$ در ساخت $\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}$ درست است. و این مطلب را چنین می نویسیم: $\models_{\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}} (\forall x \exists y x \leq y)$. یا $\forall x S(\circ) \leq x$ در ساخت $\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}$ غلط است، چراکه x مساوی صفر مثال نقض آن است و آن را این گونه می نویسیم: $\not\models_{\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}} (\forall x S(\circ) \leq x)$.

تعریف: فرض کنید Γ یک مجموعه از جملات خوش ساخت و φ یک جمله خوش ساخت در یک زبان مرتبه اول باشد. در این صورت Γ منطقاً مستلزم φ است و می نویسیم $\Gamma \models \varphi$ اگر و فقط اگر به ازای هر ساخت $\mathcal{M}$ برای زبان مورد نظر که اعضای Γ در آن صادق باشد آنگاه φ نیز در آن ساخت صدق کند. مثلاً فرض کنید $\Gamma = \{(\forall x \exists y x < y), (\forall x x < S(x))\}$ و $\sigma : \exists x S(\circ) < x$ در این صورت $\Gamma \models \sigma$ ولی فرمول $\beta : \exists x S(x) = \circ$ نتیجه منطقی Γ نیست، چراکه اگر عالم سخن را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم و بقیه پارامترها را مثل قبل تعبیر کنیم، Γ در آن درست است و β نیز در آن درست است، ولی اگر عالم سخن را $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم، Γ در آن درست است ولی β در آن درست نیست. پس $\Gamma \not\models \beta$ ، یعنی Γ منطقاً مستلزم β نیست.

تعریف پذیری یک رابطه در یک ساخت

رابطه K موضعی $\mathfrak{R}$ در ساخت $\mathcal{M}$ از زبان درجه اول $\mathcal{L}$ تعریف پذیر است اگر و فقط اگر فرمولی چون φ با k متغیر آزاد در زبان $\mathcal{L}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم، $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \models_{\mathcal{M}} \varphi(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

یعنی فرمول φ مادامی که متغیرهای آزادش را با هر یک از اعضای رابطه $\mathfrak{R}$ مقارنه می کنیم در ساخت $\mathcal{M}$ درست باشد. به طور مثال در ساخت $(\mathbb{N}, +)$ ، رابطه محمولی دو موضعی $\leq$ قابل تعریف است. ($(x \leq y) \Leftrightarrow (\exists m y = x + m)$) همچنین در این ساخت ثابت صفر توسط فرمول $\{ \circ \} : x + x = x$ قابل تعریف است.

تعبیرپذیری یک ساخت در ساختی دیگر

ساخت $\mathbb{A}$ با زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ را در ساخت β با زبان مرتبه اول $\mathcal{L}'$ تعبیرپذیر گویند، اگر و فقط اگر:

- ۱- مجموعه $|\mathbb{A}|$ در ساخت β و توسط فرمولی در زبان $\mathcal{L}'$ تعریف پذیر باشد. این مجموعه را $|\mathbb{A}|_\beta$ می نامیم.
- ۲- هر نماد محمولی در $\mathcal{L}$ (و متعاقباً در $\mathcal{L}$) در β و توسط فرمولی در زبان $\mathcal{L}'$ روی $|\mathbb{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد.
- ۳- هر نماد تابعی در $\mathcal{L}$ (و متعاقباً در $\mathcal{L}$) در β و توسط فرمولی در زبان $\mathcal{L}'$ روی $|\mathbb{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد و در ضمن تابع نیز باشد.
- ۴- هر نماد ثابت در $\mathcal{L}$ (و متعاقباً در $\mathcal{L}$) در β و توسط فرمولی در زبان $\mathcal{L}'$ روی $|\mathbb{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد.

مثال ۱.۲.۳: $(\mathbb{Z}, +)$ در $(\mathbb{N}, +)$ قابل تعبیر است.

اثبات: ۱- تعریف $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{N}$: هر عدد $z \in \mathbb{Z}$ را در $\mathbb{N}$ به صورت زوج مرتب $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ تعریف می کنیم که اگر z مثبت باشد قدرمطلق آن را در a ، و b را مساوی صفر قرار می دهیم و اگر منفی باشد قدرمطلق آنرا در b ، و a را مساوی صفر قرار می دهیم. پس $\mathbb{Z}$ به صورت زیر در $\mathbb{N}$ تعریف می شود:

$$\circ : x + x = x$$

$$\mathbb{Z} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a + a = a \vee b + b = b\}$$

۲- عمل جمع در $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{N}$ به شکل زیر قابل تعبیر است:

ابتدا برای ساده سازی رابطه دو موضعی $\leq$ را در $\mathbb{N}$ تعریف می کنیم. $x \leq y : \exists m \ y = x + m$

$+$ در $\mathbb{Z}$:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_3, b_3) \Leftrightarrow$$

$$(a_1 = \circ \wedge a_2 = \circ) \Rightarrow (b_3 = b_1 + b_2 \wedge a_3 = \circ)$$

$$(b_1 = \circ \wedge b_2 = \circ) \Rightarrow (a_3 = a_1 + a_2 \wedge b_3 = \circ)$$

$$(b_1 = \circ \wedge a_2 = \circ \wedge a_1 \geq b_2) \Rightarrow (b_3 = \circ \wedge a_1 = b_2 + a_3)$$

$$(b_1 = \circ \wedge a_2 = \circ \wedge a_1 \leq b_2) \Rightarrow (a_3 = \circ \wedge b_2 = a_1 + b_3)$$

$$(a_1 = \circ \wedge b_2 = \circ \wedge b_1 \geq a_2) \Rightarrow (a_3 = \circ \wedge b_1 = a_2 + b_3)$$

$$(a_1 = \circ \wedge b_2 = \circ \wedge b_1 \leq a_2) \Rightarrow (b_2 = \circ \wedge a_2 = b_1 + a_2)$$

نظریه

مجموعه جملات مثل T از یک زبان درجه اول یک نظریه است اگر فقط اگر تحت استلزام منطقی بسته باشد. یعنی به ازای هر جمله مانند σ از زبان اگر σ یک نتیجه منطقی T باشد، آنگاه σ عضو T باشد. به زبان ریاضی: $T \models \sigma \Rightarrow \sigma \in T$. مجموعه نتایج منطقی Σ را با $Cn\Sigma$ نشان می‌دهند، یعنی $Cn\Sigma = \{\sigma \mid \Sigma \models \sigma\}$. مشخصاً $Cn\Sigma$ یک نظریه است، چون اگر α نتیجه منطقی از $Cn\Sigma$ باشد، $(Cn\Sigma \models \alpha)$ پس در هر مدلی که $Cn\Sigma$ درست باشد، α نیز درست است. اما در هر مدلی که $Cn\Sigma$ درست باشد، Σ نیز درست است. پس نتیجتاً در هر مدلی که Σ درست باشد، α نیز درست خواهد بود. پس $\Sigma \models \alpha$ و این یعنی $\alpha \in Cn\Sigma$ پس $Cn\Sigma$ یک نظریه است.

نظریه یک ساخت

به تمام جملات درست در ساخت $\mathcal{L}$ در زبان درجه اول $\mathcal{L}$ ، نظریه ساخت $\mathcal{L}$ می‌گویند و آنرا با $Th\mathcal{L}$ نمایش می‌دهند. واضح است که برای هر ساخت $\mathcal{M}$ ، $Th\mathcal{M}$ یک نظریه است چرا که اگر جمله درجه اولی مثل α نتیجه منطقی $Th\mathcal{M}$ باشد (یعنی $Th\mathcal{M} \models \alpha$) پس در هر مدلی که $Th\mathcal{M}$ درست باشد، α نیز درست است و علی‌الخصوص $Th\mathcal{M}$ در $\mathcal{M}$ درست است. پس α نیز در آن درست است، پس $\alpha \in Th\mathcal{M}$. بعلاوه نظریه یک ساخت مثل $\mathcal{M}$ ، تام است. بدین معنی که به ازای هر جمله α در زبان این ساخت، یا خودش و یا نقیض آن متعلق به $Th\mathcal{M}$ است.

تصمیم پذیری

مجموعه Σ از جملات درجه اول در زبانی مثل $\mathcal{L}$ تصمیم پذیر است اگر الگوریتم متناهی وجود داشته باشد تا به ازای هر جمله σ در زبان $\mathcal{L}$ بتوان تصمیم گرفت که $\sigma \in \Sigma$ یا $\sigma \notin \Sigma$.

اصل پذیری

نظریه T اصل پذیر است اگر و تنها اگر یک مجموعه تصمیم پذیر از جملات مانند Σ وجود داشته باشد که

$$.T = Cn\Sigma$$

اصل پذیری متناهی

نظریه T اصل پذیر متناهی است اگر و تنها اگر یک مجموعه متناهی از جملات مانند Σ وجود داشته باشد که

$$.T = Cn\Sigma_0$$

به ویژه برای یک ساخت مثل ما داریم:

نظریه ساخت ما در زبان $\mathcal{L}$ اصل پذیر متناهی است اگر و تنها اگر مجموعه متناهی از جملات در زبان $\mathcal{L}$ مثل Σ_0

موجود باشد بطوریکه داشته باشیم $Th\mathcal{L} = Cn\Sigma_0$.

مثال ۴.۲.۱: ساخت $(\mathbb{N}, \circ, S)$ اصل پذیر است. (و نه متناهیاً اصل پذیر).

مجموعه نامتناهی Σ که اصول این ساخت را تشکیل می دهد عبارت است از:

$$\neg x \circ = S(x) - 1$$

$$\forall y \forall x ((S(x) = S(y)) \rightarrow (y = x)) - 2$$

$$\forall y \exists x ((y \neq \circ) \rightarrow (y = S(x))) - 3$$

$$\forall x S(x) \neq x - 1.4$$

$$(\forall x SS(x) \neq x - 2.4$$

$$\forall x SSS(x) \neq x - 3.4$$

...

...

...

این مجموعه متناهی نیست ولی تصمیم پذیر است، چون جملات اصل ۴ دارای ساختار خاصی هستند. و مثلاً

می دانیم که جمله ۴.ن به صورت $\forall x S^n(x) \neq x$ است.

مثالی دیگر، نظریه ساخت $(\mathbb{N}, \circ, S, <)$ اصل پذیر متناهی است و این اصول به صورت زیر هستند:

$$1- \forall y \exists x ((y \neq \circ) \rightarrow (y = S(x)))$$

$$2- \nexists x (x < \circ)$$

$$3- \forall y \forall x (x = y \vee x < y \vee x > y)$$

$$4- \forall y \forall x \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

$$5- \forall y \forall x (x < y \rightarrow y \not< x \wedge x \neq y)$$

$$6- \forall y \forall x ((x < S(y)) \leftrightarrow (y = x \vee x < y))$$

قضیه ۱.۲.۱ :

گروه بدون تاب آبدی $(G, +)$ در زبان درجه اولی که تنها پارامتر آن نماد تابعی دو موضعی $+$ باشد، (یعنی تنها پارامتر آن عمل گروه باشد) اصل پذیر متناهی نیست. (درواقع با هیچ تعداد متناهی جمله در زبان درجه اول مذکور نمی توان بدون تاب بودن را منطقاً استنتاج کرد.)

اثبات:

مشخص است که تنها فرمول بسیط ممکن در این زبان به صورت $x + y = z$ است. و تنها ثابتی که در این زبان قابل تعریف است صفر این گروه است. که با فرمول $x + x = x$ تعریف می شود. اگر بخواهیم در این زبان نظریه این ساخت را اصل بندی کنیم باید مجموعه جملاتی در این زبان ارائه دهیم که اولاً گروه بودن G را برآورده سازند و ثانیاً بدون تاب بودن آنرا تضمین نمایند. قسمت اول با تعداد متناهی جمله (که همان اصول موضوعه گروههای آبدی باشد) محقق می شود. اما برای محقق کردن قسمت دوم باید به نحوی به این واقعیت اشاره کنیم که هیچ عضو تابی از G وجود ندارد یعنی هیچ عضو غیر صفری از G نیست که با تعداد متناهی عمل روی خود (جمع با خودش) برابر صفر شود. به عبارت دیگر این جملات باید به صورت :

$$t_1 : \forall x (x \neq \circ \rightarrow x + x \neq x)$$

$$t_2 : \forall x (x \neq \circ \rightarrow x + x + x \neq x)$$

...

$$t_k : \forall x (x \neq \circ \rightarrow \underbrace{x + x + \dots}_{k\text{-times}} \neq x)$$

باشند. رابطه‌ی ترتیب $<$ را روی جملات t_i بدین صورت تعریف می‌کنیم : $t_n < t_m \leftrightarrow n < m$. پس هر مجموعه متناهی غیر تهی از جملات t_i دارای بزرگترین عضو است. (فرض کنیم چنین عضوی وجود نداشته باشد، چون این مجموعه غیر تهی است پس دارای عضوی چون t_i است و چون طبق فرض خلف t_i بزرگترین عضو این مجموعه نیست پس عضو دیگری چون t_j از این مجموعه وجود دارد که $t_i < t_j$ ولی t_j نیز طبق فرض بزرگترین عضو این مجموعه نیست پس t_k ای عضو این مجموعه وجود دارد که ...، با ادامه همین روند زنجیره نامتناهی $t_i < t_j < t_k < \dots$ از اعضای این مجموعه تشکیل می‌شود که مخالف فرض متناهی بودن آن است. پس فرض خلف غلط است و این مجموعه دارای بزرگترین عضو است.) فرض کنیم بزرگترین عضو این مجموعه t_k باشد با در نظر گرفتن $\mathbb{Z}_{k+1}$ مدلی برای این مجموعه متناهی از جملات که در آن عنصری مثل x از مشخصه‌ی $k+1$ است، داریم که اولاً گروه آبلی است (شرط اول را برآورده می‌کند). و ثانیاً دارای عضوی تاب دار است. (یعنی شرایط ثانویه را برآورده نمی‌کند) پس هر گروه آبلی بدون تابی اصل پذیر متناهی نیست.

رابطه بازگشتی

رابطه k موضعی $\mathfrak{R}$ روی اعداد طبیعی بازگشتی است اگر مجموعه متناهی از جملات درجه اول مثل Σ_0 وجود داشته باشد که به ازای هر k تایی مرتب از اعداد طبیعی مثل $(a_1, \dots, a_k)$ داشته باشیم :

$$(a_1, \dots, a_k) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \Sigma_0 \models (a_1, \dots, a_k) \in \mathfrak{R}$$

یعنی $(a_1, \dots, a_k)$ عضو $\mathfrak{R}$ است اگر و فقط اگر بتوان این عضویت را از مجموعه جملات Σ_0 منطقاً استنتاج نمود. به طور شهودی این تعریف مدعی است که رابطه‌ی $\mathfrak{R}$ بازگشتی است، اگر بتوان دستوری متناهی برای تصمیم گیری در مورد عضویت هر k تایی مرتب در $\mathfrak{R}$ ارائه کنیم و در واقع بازگشتی بودن معادل صحیح و دقیق مفهوم تصمیم پذیر بودن است. (این واقعیت به تزیچ معروف است.)

محاسبه پذیری

تابع f محاسبه پذیر است اگر به عنوان یک رابطه، بازگشتی باشد. پس مفهوم محاسبه پذیر بودن چیزی جز مفهوم بازگشتی بودن نیست که برای توابع به کار می رود.

مثال ۵.۲.۱: تابع $+$ در ساخت $(\mathbb{N}, \circ, S, +)$ به صورت زیر اصل بندی یا به عبارت دیگر به صورت بازگشتی محاسبه می شود :

$$A_1 : \forall x \circ + x = x$$

$$A_2 : \forall x \forall y S(y) + x = S(x + y)$$

برای درک این مطلب که چرا تابع جمع با جملات بالا محاسبه پذیر است، طبق تعریف باید ثابت کنیم که تابع دو موضعی جمع به عنوان یک رابطه سه موضعی بازگشتی است. یعنی به ازای هر سه تایی (a, b, c) از اعداد طبیعی با استفاده از جملات بالا می توان تصمیم گرفت که آیا $c = a + b$ درست است یا خیر. به طور مثال می توان نشان داد که سه تایی مرتب $(2, 1, 3)$ توسط جملات A_1, A_2 عضو رابطه جمع تصمیم گیری می شوند. طبق A_1 داریم $\circ + 1 = S(\circ)$ و طبق A_2 داریم $\circ + 1 = S(\circ + 1)$ که با قراردادن مقداری که در ابتدا برای $\circ + 1$ محاسبه شده در رابطه دوم داریم: $1 + 1 = S(S)(\circ) = S^2(\circ)$ با ادامه این روند داریم: $2 + 1 = S(1) + 1 = S(1 + 1) = S(S^2)(\circ) = S^3(\circ)$ پس $(2, 1, 3)$ عضو رابطه جمع است.

یا تابع ضرب $\times$ در ساخت $(\mathbb{N}, \circ, S, +, \times)$ با جملات M_1, M_2 به صورت بازگشتی زیر قابل تعیین است:

$$M_1 : \forall x \circ \times x = \circ$$

$$M_2 : \forall x \forall y S(y) \times x = y \times x + x$$

به طور کلی تابع f محاسبه پذیر یا معادلاً به صورت بازگشتی تعیین پذیر است اگر داشته باشیم: $f(\circ) = S^a(\circ)$ و $\forall y \quad f(S(y)) = \mathfrak{R}(f(y))$ که در آن $\mathfrak{R}$ تابعی بازگشتی است.

شمارش پذیر بازگشتیانه

رابطه Ω شمارش پذیر بازگشتیانه است اگر و فقط اگر دامنه یک رابطه بازگشتی مثل $\mathfrak{R}$ باشد یعنی

$$\bar{a} \in \Omega \leftrightarrow \exists b(\bar{a}, b) \in \mathfrak{R}$$

سلسله مراتب حسابی

رابطه $\mathfrak{R}$ را یک رابطه بازگشتی روی اعداد طبیعی در نظر بگیرید در این صورت رده های زیر از روابط روی

اعداد طبیعی قابل تعریفند:

$$\Delta_1^\circ : \{ \bar{a} | \Gamma_\circ \models \mathfrak{R}(\bar{a}) \}$$

رده تمام روابط بازگشتی است.

$$\Sigma_1^\circ : \{ \bar{a} | \exists b(\bar{a}, b) \in \mathfrak{R} \}$$

در واقع Σ_1° رده تمام روابطی است که دامنه ی یک رابطه ی بازگشتی باشند.

$$\Pi_1^\circ : \{ \bar{a} | \nexists b(\bar{a}, b) \in \mathfrak{R} \} = \{ \bar{a} | \forall b(\bar{a}, b) \notin \mathfrak{R} \} = \{ \bar{a} | \forall b(\bar{a}, b) \in \mathfrak{R}' \}$$

اگر $\mathfrak{R}$ یک رابطه بازگشتی باشد متمم آن نیز یک رابطه بازگشتی چون $\mathfrak{R}'$ است. در واقع Π_1° رده تمام روابطی

است که متمم دامنه ی رابطه ی بازگشتی باشند.

$$\Sigma_2^\circ : \{ \bar{a} | \exists b_2 \forall b_1 (\bar{a}, b_1, b_2) \in \mathfrak{R} \}$$

...

$$\Sigma_k^\circ : \{ \bar{a} | \exists b_k \forall b_{k-1} \exists b_{k-2} \dots (\bar{a}, b_k, b_{k-1}, \dots, b_1) \in \mathfrak{R} \}$$

$$\Pi_k^\circ : \{ \bar{a} | \forall b_k \exists b_{k-1} \forall b_{k-2} \dots (\bar{a}, b_k, b_{k-1}, \dots, b_1) \in \mathfrak{R} \}$$

در این زنجیره به ازای هر $k \geq 1$ داریم: $\Sigma_k^\circ \cap \Pi_k^\circ = \Delta_k^\circ$ و $\Sigma_k^\circ \cup \Pi_k^\circ = \Delta_{k+1}^\circ$ و نیز برای هر $i < k$ داریم:

$$\Delta_i^\circ \subseteq \Pi_i^\circ \subseteq \Sigma_k^\circ \text{ و } \Delta_i^\circ \subseteq \Sigma_i^\circ \subseteq \Pi_k^\circ$$

فصل دوم

FA —نمایش پذیری

۱.۲ FA —نمایش پذیری

یک ساخت از یک زبان با نمادهای متناهی FA —نمایش پذیر است اگر و فقط اگر اولاً الفبایی مثل Σ وجود داشته باشد که عناصر این ساخت توسط دنباله های متناهی روی Σ در یک زبان منظم مثل $\mathcal{D}$ قابل نمایش باشند ($\mathcal{D} \subseteq \Sigma^*$) و ثانیاً درستی هر فرمول اتمی برای هر یک چندتایی مرتب از اعضای این ساخت تصمیم پذیر کارآمد باشد، یعنی اتوماتونی متناهی بتواند درستی رابطه های اتمی که به وسیله زبان مرتبه اول برای این مجموعه نمادها داده شده اند را برای چندتایی از عناصر این ساخت مثل $(u_1, \dots, u_k)$ بیازماید. برای آزمودن روابط اتمی، کلمات نشان دهنده هر یک از u_i ها که خود مؤلفه ای از ورودی است، زیر یکدیگر نوشته می شوند و از پشته علائم که زیر مجموعه ای از $\Sigma \cup \{\diamond\}$ است استفاده می شود. مانند آنچه در زیر آمده است:

a	c
b	b
c	$\diamond$

می توان با اضافه کردن نشانه $\diamond$ به انتهای هر رشته نمایشی، هر مجموعه متناهی از این رشته ها را با هم هم طول کرد.

توجه به این مطلب اساسی است، که اگر اعضای یک ساخت FA —نمایش پذیر دارای چند نمایش در زبان منظم $\mathcal{L}$ باشند، آنگاه اتوماتونی متناهی می تواند تصمیم بگیرد که آیا دو رشته ی متفاوت، نمایشی برای یک عضو هست یا خیر؟ یعنی رابطه ی هم ارزی، نمایش یک عضو بودن توسط این اتوماتون تصمیم گیری می شود.

مثال ۱.۲: چرا $(\mathbb{N}, +)$ ، FA —نمایش پذیر است؟

ما اعداد را به صورت دودویی، به کوتاه ترین فرم خود می نویسیم. (یعنی صفرهای سمت راست را حذف می کنیم، چراکه اعدادمان را از راست به چپ (برعکس حالت معمول) می نویسیم. چون طبق قرارداد اتوماتونها ورودی خود را از چپ به راست می خوانند.) و به جای عدد صفر، از رشته تهی $(\diamond)$ استفاده می کنیم. بنابراین الفبایی که اعضای ساخت مان را روی آن نمایش می دهیم $\Sigma = \{0, 1\}$ است. دامنه زبانمان شامل همه رشته هایی از Σ^* است که به یک ختم می شوند. طبق قرارداد عدد صفر با رشته تهی نمایش داده می شود. یک اتوماتون متناهی می تواند درستی جمع را که از طریق رویه معمولی بیت نقلی انجام می پذیرد، بیازماید و معین کند چه جایی بیت نقلی به سمت راست انتقال پیدا می کند. $\diamond$ مانند صفر عمل می کند. برای مثال پذیرنده صحت و سقم معادله $27 = 22 + 5$ را با پذیرش این معادله به عنوان یک رشته ورودی تحقیق می کند. این پذیرنده دارای سه وضعیت N (بیت نقلی ندارد)، C (بیت نقلی دارد) و A (وضعیت پذیرش نهایی) می باشند. N وضعیت اولیه است که تابع انتقال آن در مثال ۲.۱.۱ از فصل مقدمات کلی تشریح شده است.

۱	۰	۱	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$
۰	۱	۱	۰	۱	$\diamond$
۱	۱	۰	۱	۱	$\diamond$

۱.۱.۲ قضایایی در باب ساختهای FA —نمایش پذیر

قضیه ۱.۲ :

الف: هر ساخت متناهی $\mathcal{A}$ ، FA —نمایش پذیر است.

ب: هر ضرب متناهی از ساخت های FA —نمایش پذیر، FA —نمایش پذیر است.

اثبات:

الف: کافی است Σ را $|\mathcal{F}|$ در نظر بگیریم. پس هر عضو $\mathcal{F}$ توسط یک نماد از Σ نمایش داده می شود و در واقع زبان $\mathcal{D}$ که اعضای $\mathcal{F}$ را در آن نمایش می دهیم همان Σ است. پس $\mathcal{D}$ متناهی است (چون $\mathcal{F}$ متناهی است) و بنابراین $\mathcal{D}$ منظم است. حال باید نشان دهیم هر رابطه اتمی در $\mathcal{F}$ را به ازای هر عضو آن می توان توسط یک اتوماتون متناهی آزمود. چون $|\mathcal{F}|$ متناهی است پس هر رابطه در ساخت $\mathcal{F}$ نیز متناهی است. پس برای آزمودن رابطه ای مثل $\mathcal{R}$ در $\mathcal{F}$ کافی است تمام کلماتی که در $\mathcal{R}$ هستند به حالت پذیرش نهایی و متمم آنها به حالت رد برود، بنابراین هر رابطه ی اتمی در $\mathcal{F}$ قابل آزمودن با اتوماتون است. یعنی طبق تعریف $\mathcal{F}$ ، FA —نمایش پذیر است.

ب: ابتدا ثابت می کنیم که اگر $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ دو ساخت FA —نمایش پذیر باشند آنگاه $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ نیز FA —نمایش پذیر است. قرار می دهیم $\Sigma = |\mathcal{F}_1| \times |\mathcal{F}_2|$. چون این دو ساخت FA —نمایش پذیر هستند، پس Σ نیز منظم است. مجموعه روابط اتمی ساخت $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ به صورت $(\alpha(a_1, \dots, a_n), \beta(b_1, \dots, b_m))$ است که در آن α رابطه ای اتمی از ساخت $\mathcal{F}_1$ و β رابطه ای اتمی از ساخت $\mathcal{F}_2$ است. چون هر دوی این ساختها FA —نمایش پذیر هستند پس به ازای هر $\vec{a} \in |\mathcal{F}_1|$ و $\vec{b} \in |\mathcal{F}_2|$ اتوماتونی هست که درستی $\alpha(\vec{a})$ و $\beta(\vec{b})$ را بیازماید. با اجتماع گیری از وضعیتهای این دو اتوماتون، اتوماتونی خواهیم داشت که به ازای هر فرمول اتمی (α, β) درستی $(\alpha, \beta)(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ را بیازماید. پس درستی هر فرمول اتمی در $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ به ازای هر چندتایی از $|\mathcal{F}_1| \times |\mathcal{F}_2|$ توسط این اتوماتون قابل تصمیم گیری است. یعنی $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ FA —نمایش پذیر است. و بنابراین با استقراء می توان ثابت کرد که حاصل ضرب هر تعداد متناهی از ساختهای FA —نمایش پذیر، FA —نمایش پذیر است.

قضیه ۲.۲ (خاصیت تفحص ارزیابی):

نظریه ی یک ساخت FA —نمایش پذیر، تصمیم پذیر است.

اثبات:

فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک ساخت FA —نمایش پذیر باشد. همانطور که در فصل مقدمات بیان شده است، مجموعه فرمولهای خوش ساخت در زبان $\mathcal{F}$ مجموعه پدید آمده از فرمولهای اتمی توسط نمادهای منطقی است. پس اثبات را به استقراء روی فرمولهای خوش ساخت مربوط به $\mathcal{F}$ انجام می دهیم. چون $\mathcal{F}$ یک ساخت FA —نمایش پذیر است پس هر فرمول اتمی مربوط به زبان $\mathcal{F}$ به ازای هر چندتایی مرتب از اعضای $|\mathcal{F}|$ تصمیم پذیر است. فرض کنیم α و β فرمول درست ساختی باشند که به ازای هر چندتایی مرتب از $|\mathcal{F}|$ درستی آنها تصمیم پذیر باشد (فرض استقراء). حال باید نشان دهیم که درستی فرمولهای $\neg\alpha$ و $\alpha \rightarrow \beta$ و $\exists x \alpha(x)$ نیز به ازای هر چندتایی مرتب از اعضای $|\mathcal{F}|$ تصمیم پذیر است. به ازای هر چندتایی مرتب مثل $(a_1, \dots, a_n)$ ، $\neg\alpha$ درست است اگر و فقط اگر $\alpha(a_1, \dots, a_n)$ در ساخت $\mathcal{F}$ غلط باشد. نیز به ازای هر $(a_1, \dots, a_n)$ ، $\alpha \rightarrow \beta$ درست است اگر و فقط اگر $(\neg\alpha \vee \beta)(a_1, \dots, a_n) \models_{\mathcal{F}}$ برقرار باشد. اما برای تصمیم پذیری $\exists x \alpha(x)$ از معادل بودن DFA و NFA استفاده می کنیم. یعنی اتوماتون غیر قطعی ای را برای حدس (جستجوی متناهی) x_0 ای بکار می بریم و به ازای آن تحقیق می کنیم که $\alpha(x_0)$ درست است یا خیر. پس با یک اتوماتون غیر قطعی می توانیم درستی $\exists x \alpha(x)$ را تصمیم بگیریم. از آنجایی که برای هر فرمول خوش ساخت دیگر می توان فرمول خوش ساخت معادلی با استفاده از ترکیب متناهی از این سه نماد منطقی تولید نمود پس تصمیم پذیری در مورد درستی آنها نیز با تصمیم پذیری درستی این سه نماد اثبات می گردد. بنابراین می توان به ازای هر جمله در زبان مربوط به ساخت $\mathcal{F}$ مشخص نمود که این جمله درست است یا غلط. بنابراین نظریه ی این ساخت، تصمیم پذیر است.

تعبیر و تصمیم پذیری:

تعبیرپذیری ساختی مثل $\mathcal{B}$ در ساختی دیگر مثل A در فصل مقدمات توضیح داده شده است. مع ذلک در اینجا اشاره ای اجمالی به آن مفاهیم می کنیم. در یک گویش تقریبی ساخت $\mathcal{B}$ در ساخت A قابل تعبیر است اگر اعضای $|\mathcal{B}|$ را بتوان بوسیله چندتایی مرتب یک رابطه قابل تعریف مثل $E_{\mathcal{B}}$ در A نمایش داد، بطوریکه رابطه تساوی در $\mathcal{B}$ تبدیل به یک رابطه تساوی روی $E_{\mathcal{B}}$ گردد و نیز دیگر روابط اتمی روی $\mathcal{B}$ به عنوان زیر مجموعه هایی از $E_{\mathcal{B}}$ در A تعریف پذیر باشند.

قضیه ۳.۲: اگر ساخت $\mathcal{B}$ قابل تعبیر در ساخت FA —نمایش پذیر A باشد، آنگاه ساخت $\mathcal{B}$ نیز FA —نمایش

پذیر است.

اثبات :

چون $\mathfrak{B}$ در A تعبیر پذیر است، پس فرمول درجه اولی مثل $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در زبان ساخت A وجود دارد که اعضای $|\mathfrak{B}|$ را در A نمایش می دهد. (یعنی $\varphi_{\mathfrak{B}}$ ، رابطه ی $E_{\mathfrak{B}}$ را در ساخت A تعریف می کند.) به عبارت دیگر چندتایی $(b_1, \dots, b_m)$ نمایش عضوی مثل b از $|\mathfrak{B}|$ در A است اگر و فقط اگر داشته باشیم $\models_A \varphi_{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_m) \Leftrightarrow b \in |\mathfrak{B}|$. یعنی هر یک از اعضای $|\mathfrak{B}|$ را می توان بوسیله ی m تایی ای از اعضای $|A|$ که اعضایی از رابطه $E_{\mathfrak{B}}$ نیز هستند، نمایش داد. چون ساخت A ، FA —نمایش پذیر است طبق قضیه تفحص ارزیابی $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در ساخت A تصمیم پذیر است. ولذا رابطه ی تساوی در $\mathfrak{B}$ تبدیل به رابطه تساوی در ساخت A روی مجموعه ی $E_{\mathfrak{B}}$ می گردد. چون اعضای $|\mathfrak{B}|$ در ساخت A توسط m تایی های مرتب از اعضای این ساخت نمایش پذیرند و نیز رابطه ی تساوی در ساخت $\mathfrak{B}$ ، به یک رابطه تساوی تصمیم پذیر توسط فرمول $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در ساخت A بدل می گردد، پس این m تایی های عضو $E_{\mathfrak{B}}$ یک FA —نمایش برای اعضای $|\mathfrak{B}|$ هستند. به علاوه چون هر رابطه اتمی k موضعی مثل $\mathfrak{R}$ در ساخت $\mathfrak{B}$ توسط فرمولی چون $\psi_{\mathfrak{R}}$ با $k \times m$ متغیر آزاد، در A تعبیر می شود و نیز ساخت A طبق فرض FA —نمایش پذیر است، پس طبق قضیه تفحص ارزیابی به ازای هر $k \times m$ تایی از اعضای A ، $\psi_{\mathfrak{R}}$ در A تصمیم پذیر است. به علاوه همانطور که در پاراگراف قبل توضیح داده شد، چون رابطه $E_{\mathfrak{B}}$ در ساخت A تصمیم پذیر است، پس برای هر k تایی از اعضای $E_{\mathfrak{B}}$ می توان مشخص کرد که $\psi_{\mathfrak{R}}$ درست است یا خیر. یعنی به طور خلاصه تعبیر هر رابطه اتمی مثل $\mathfrak{R}$ در ساخت A تصمیم پذیر است. چون هر یک از اعضای $\mathfrak{B}$ دارای یک FA —نمایش از m تایی های مرتب از اعضای A است و نیز هر رابطه ی اتمی در $\mathfrak{B}$ معادلی تصمیم پذیر در ساخت A دارد می توان نتیجه گرفت که ساخت $\mathfrak{B}$ ، FA —نمایش پذیر است.

مثال ۲.۲: مجموعه ی اعداد حقیقی را به صورت ساختی مثل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ در نظر بگیرید. نشان می دهیم که

$$(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$$

(که در آن $GL_n(\mathbb{R})$ مجموع تمام ماتریسهای $n \times n$ ای است که دترمینان آنها غیر صفر است و منظور از $+$ و $\times$ در این ساخت جمع و ضرب ماتریسهاست) در ساخت $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ تعبیر پذیر است.

ابتدا تعریف $GL_n(\mathbb{R})$ در ساخت $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

هر ماتریس $n \times n$ را می توان با n^2 تایی مرتب مشخص کرد و نیز دستوری برحسب جمع و ضرب $\mathbb{R}$ برای محاسبه جمع و ضرب دو ماتریس $n \times n$ وضع نمود. چون جمله $\det(U) \neq 0$ در زبان ساخت $\mathbb{R}$ قابل بیان است پس مجموعه $GL_n(\mathbb{R})$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در ساخت $\mathbb{R}$ تعریف پذیر است.

جمع دو ماتریس $n \times n$ در واقع جمع درایه به درایه دو n^2 تایی مرتب است و ضرب آنها نیز با عمل جمع و ضرب $\mathbb{R}$ چنین تعریف می شود:

$$(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nn}) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \times (b_{11}, \dots, b_{1n}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{nn})$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j \ (1 \leq i, j \leq n) \ u_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{in}.b_{nj}$$

پس طبق آنچه در مورد تعبیر یک ساخت در ساخت دیگر در فصل مقدمات ذکر گردید $(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$ در $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ تعبیر پذیر است.

۲.۲ - نمایش پذیری ضعیف FA

ساخت $\mathcal{A}$ را ضعیفاً FA -نمایش پذیر گوئیم اگر رابطه تساوی و نیز هر رابطه اتمی K -موضعی این ساخت به ازای هر k تایی از عناصر این ساخت تصمیم پذیر کارآمد باشند. یعنی اتوماتونی متناهی موجود باشد که به ازای هر رابطه اتمی k موضعی مثل $\mathcal{A}$ از $\mathcal{A}$ به هر k تایی مرتب از اعضای $\mathcal{A}$ مشخص کند که $\mathcal{A}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ در ساخت $\mathcal{A}$ درست است یا خیر. در مقایسه به FA -نمایش پذیری، FA -نمایش پذیری ضعیف فقط شرط اینکه اعضای $\mathcal{A}$ در زبان منظمی چون $\mathcal{L}$ روی الفبای متناهی چون Σ نمایش پذیر باشند را کم دارد. به عبارت دیگر اگر اعضای ساخت $\mathcal{A}$ دارای چند نمایش مختلف باشند، برای اثبات FA -نمایش پذیری ضعیف ساخت $\mathcal{A}$ لازم نیست روشی کارآمد برای تصمیم در مورد تساوی دو نمایش مختلف ارائه دهیم.

۱.۲.۲ تعریف ω برای ساختی چون $\mathfrak{F}$

ساخت $\mathfrak{F}$ را در نظر بگیرید. ساخت ω از روی $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

(الف) $|\mathfrak{F}^\omega| = \{g: \mathbb{N} \rightarrow |\mathfrak{F}| \mid g \text{ is almost constant.}\}$ یعنی می توان اعضای $\mathfrak{F}$ را به صورت دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ در نظر گرفت. بدین ترتیب که هر عضو $g \in \mathfrak{F}^\omega$ (که نوعاً تابعی نامتناهی ولی تقریباً ثابت است، یعنی فقط تعداد متناهی از اعضای آن متمایزند و این به نوبه ی خود ایجاب می کند که از جایی به بعد g ثابت باشد) را بصورت $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ نمایش دهیم، بطوری که $g_{n-1} \neq g_n$ و به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از n مقدار g به عنوان یک تابع برابر g_n باشد.

(ب) به ازای هر نماد تابعی یک موضعی f ، در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ ، تابع f^{ω} در ساخت ω از روی تابع f در ساخت $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

به ازای هر عضو u از $|\mathfrak{F}^\omega|$ که در واقع دنباله متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ است، $(u = (a_1, \dots, a_n))$ داریم:

$$f^{\omega}(u) = f^{\omega}(a_1, \dots, a_n) = (f^{\mathfrak{F}}(a_1), f^{\mathfrak{F}}(a_2), \dots, f^{\mathfrak{F}}(a_n)) \in |\mathfrak{F}^\omega|.$$

برای توسیع این تعریف برای نماد k موضعی f_k در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ باید عناصر u_1 تا u_k از $\mathfrak{F}^\omega$ که دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ هستند را باهم هم طول کنیم. برای این کار از روی دنباله های متناهی u_1 تا u_k طول بیشین (ماکسیمال) را مشخص می کنیم، یعنی اگر نماد $|u_i|$ را طول دنباله ی u_i در نظر بگیریم و فرض کنیم طول بیشین u_1 تا u_k m است داریم $|u_i| \leq m$ برای هر i که $1 \leq i \leq k$. برای هم طول کردن u_i ها، طول هر u_j ای که اندازه اش از m کوچکتر است را با تکرار آخرین عضو آن، به m می رسانیم. در این صورت دنباله های u_1 تا u_k هم طول و طول آنها برابر m خواهد شد. حال برای نماد k موضعی f_k در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ داریم:

$$\begin{aligned} f_k^{\omega}(u_1, \dots, u_k) &= f_k^{\omega}((a_1 \ 1, \dots, a_1 \ m), (a_2 \ 1, \dots, a_2 \ m), \dots, (a_k \ 1, \dots, a_k \ m)) \\ &= (f_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ 1, \dots, a_k \ 1), f_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ 2, \dots, a_k \ 2), \dots, f_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ m, \dots, a_k \ m)). \end{aligned}$$

(ج) به ازای هر نماد محمولی k موضعی، $\mathfrak{R}_k$ در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ ، رابطه ی $\mathfrak{R}_k^{\omega}$ در ساخت ω از روی رابطه ی $\mathfrak{R}_k$ در ساخت $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}(u_1, \dots, u_k) &= \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}((a_1 \ 1, \dots, a_1 \ m), (a_2 \ 1, \dots, a_2 \ m), \dots, (a_k \ 1, \dots, a_k \ m)) \\ &= \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ 1, \dots, a_k \ 1) \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ 2, \dots, a_k \ 2) \wedge \dots \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 \ m, \dots, a_k \ m).\end{aligned}$$

قضایایی در باب ساختهای $\mathfrak{F}^\omega$

قضیه ۴.۲: برای هر ساخت متناهی $\mathfrak{F}$ ، $\mathfrak{F}^\omega$ ، FA —نمایش پذیر است.

طبق تعریف ساختهای FA —نمایش پذیر برای اثبات این قضیه باید اولاً نشان دهیم که اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ را می توان به وسیله زبانی منظم روی الفبایی متناهی چون Σ نمایش داد و ثانیاً نشان دهیم رابطه تساوی و دیگر روابط اتمی ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ به طور کارآمد تصمیم پذیرند.

الف) اثبات قسمت اولاً: چون ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی است پس طبق قضیه ۱.۲ الف، FA —نمایش پذیر است. این بدان معناست که هر یک از اعضای ساخت $\mathfrak{F}$ را می توان در زبانی منظم مثل $\mathcal{L}$ روی الفبایی متناهی مثل Σ نمایش داد. اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ ، دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ هستند. یک اتوماتون متناهی می تواند با جستجوی متناهی تصمیم بگیرد که جمله $(|g| = m \Rightarrow g(m) \neq g(m-1)) \wedge (\forall n \exists a \in \mathfrak{F} \ S.T \ g(n) = a)$ برای σ در دنباله ای چون g درست است یا خیر. یعنی می تواند مشخص کند که $g \in \mathfrak{F}^\omega$ است یا نه. توجه کنید که هر دو سور این جمله مقید هستند. سور اولی که واضحاً مقید است، چرا که g دنباله ای متناهی است، پس اگر $|g|$ را طول دنباله ی g در نظر بگیریم، سور برای هر n در حقیقت برای هر $|g| \leq n$ است. در مورد سور دوم (سور وجودی) هم چون مجموعه $|\mathfrak{F}|$ متناهی است پس سور روی آن مقید است. توجه به این نکته از این نظر حائز اهمیت است که تنها جملاتی که با سور مقید هستند می توانند توسط یک اتوماتون متناهی تصمیم گیری شوند، چرا که مجموعه ی وضعیت های یک اتوماتون متناهی است. با فرض اینکه Σ فاقد نمادی چون $\diamond$ باشد، می توان Σ_1 را برابر $\{\diamond\} \cup \Sigma$ قرار داد. پس دنباله ای چون $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ را می توان به صورت $r_{a_1} \diamond r_{a_2} \diamond \dots \diamond r_{a_n}$ نمایش داد که در آن r_{a_i} نمایش عضو a_i از ساخت $\mathfrak{F}$ در زبان منظم $\mathcal{L}$ روی الفبای متناهی Σ است. چون $\mathcal{L}$ منظم است پس اتوماتونی چون $\mathcal{M}$ می تواند تصمیم بگیرد که r_{a_i} نمایش عضوی چون a_i از $\mathfrak{F}$ هست یا خیر. پس

همین اتوماتون (با کمی تغییر) می تواند مشخص کند $r_{a_1} \diamond r_{a_2} \diamond \dots \diamond r_{a_n}$ عضوی از ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ هست یا خیر. (ب) اثبات قسمت ثانیاً: چون ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی است پس FA نمایش پذیر است. طبق تعریف ساختهای FA نمایش پذیر اتوماتونی چون $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که به ازای هر رابطه ی اتمی k موضعی $\mathfrak{R}^\delta$ و k تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{F}$ مثل $(a_1, \dots, a_k)$ تصمیم بگیرد که $\mathfrak{R}^\delta(a_1, \dots, a_k)$ در $\mathfrak{F}$ درست است یا خیر. مطابق آنچه که در تعریف ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ گفته شد، رابطه اتمی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}$ برای هر k تایی از اعضای این ساخت مثل $(u_1, \dots, u_k)$ معادل جمله

$$\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}(u_1, \dots, u_k) = \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 1, \dots, a_k 1) \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 2, \dots, a_k 2) \wedge \dots \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 m, \dots, a_k m)$$

است. طبق خاصیت تفحص ارزیابی، اتوماتون $\mathfrak{M}$ می تواند تصمیم بگیرد که این جمله در ساخت $\mathfrak{F}$ درست است یا خیر. پس این اتوماتون می تواند تصمیم بگیرد که $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}$ به ازای هر k تایی از اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ مثل $(u_1, \dots, u_k)$ درست است یا خیر. یعنی هر رابطه اتمی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}$ در ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ تصمیم پذیر کار آمد است. رابطه دو موضعی تساوی نیز در این ساخت تصمیم پذیر است. چرا که برای دو دنباله متناهی چون $(u_1, \dots, u_m)$ و $(w_1, \dots, w_n)$ که در آن $m \geq n$ ، با فرض اینکه r_{u_i} و r_{w_i} به ترتیب دنباله های نمایشی u_i و w_i روی الفبای Σ_1 باشند، داریم :

$$\vec{U} = \vec{W} \Leftrightarrow r_{u_1} = r_{w_1} \wedge r_{u_2} = r_{w_2} \wedge \dots \wedge r_{u_n} = r_{w_n} \wedge r_{u_n} = r_{w_{n+1}} \wedge \dots \wedge r_{u_m} = r_{w_m}$$

چون هر رابطه ی تساوی بین اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ را می توان معادل با جمله ای نظیر جمله ی درجه اول فوق در $\mathfrak{F}$ قرار داد و نیز چون هر جمله ی درجه اول در $\mathfrak{F}$ طبق خاصیت تفحص ارزیابی تصمیم پذیر است پس اتوماتون $\mathfrak{M}$ میتواند رابطه ی تساوی در $\mathfrak{F}^\omega$ را نیز تصمیم بگیرد.

توجه کنید که طبق تعریف $[(\forall n \exists a \in \mathfrak{F} \ g(n) = a) \wedge (|g| = m \Rightarrow g(m) \neq g(m-1))]$ $\sigma : g \in |\mathfrak{F}^\omega|$ اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ را مشخص می کند. قبلاً اشاره کردیم که سور وجودی روی اعضای $|\mathfrak{F}|$ فقط وقتی توسط اتوماتون (غیر قطعی) قابل تشخیص است که مقید باشد. یعنی این سور نمادی از جستجوی متناهی در اعضای $|\mathfrak{F}|$ باشد. برای روشن شدن این مطلب، فرض کنید ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی باشد، جمله σ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma : g \in |\mathcal{F}^\omega| \Leftrightarrow (\forall n \ g(n) = a_1) \vee (\forall n \ g(n) = a_2) \vee \dots \vee (\forall n \ g(n) = a_m)$$

که $|\mathcal{F}| = \{a_1, \dots, a_m\}$. پس به طور کلی هم‌ارزی دونهمایش عنصری از $\mathcal{F}^\omega$ برای یک ساخت نامتناهی $\mathcal{F}$ توسط اتوماتون متناهی قابل تصمیم نیست. مگر اینکه زیر مجموعه ای از $\mathcal{F}^\omega$ را در نظر بگیریم که سور وجودی در جمله σ را مقید کند و در نتیجه هم‌ارزی نمایش‌های اعضای آن قابل تصمیم توسط اتوماتونی متناهی باشد. مثلاً نمایش اعضای $\mathcal{F}^\omega$ که از جایی به بعد مقدار ثابتی چون $a \in |\mathcal{F}|$ دارند، قابل تشخیص توسط اتوماتون متناهی هستند. یعنی $g_a = \{g \in |\mathcal{F}^\omega| \mid \forall n \geq N_0 \ g(n) = a\}$ قابل تشخیص توسط اتوماتون متناهی است. ولی قابل تشخیص بودن هم‌ارزی نمایش‌های اعضای یک ساخت برای اتوماتونی متناهی فقط شرط لازم برای FA -نمایش‌پذیری آن ساخت را فراهم می‌آورد، یعنی برای FA -نمایش‌پذیری زیر ساختی از $\mathcal{F}^\omega$ که در آن $\mathcal{F}$ ساختی نامتناهی و FA -نمایش‌پذیر است، علاوه بر تشخیص‌پذیری اعضای آن باید توابع و روابط اتمی ساخت $\mathcal{F}$ در آن تصمیم‌پذیر باشند. تعریف و قضیه ی زیر بصورت دقیقتری این موضوع را بررسی می‌نماید.

اگر ساخت $\mathcal{F}$ ساختی نامتناهی و FA -نمایش‌پذیر باشد آنگاه ساخت $\mathcal{F}_S^\omega$ زیر ساختی از $\mathcal{F}^\omega$ است که به صورت $\mathcal{F}_S^\omega = \{g : \mathbb{N} \rightarrow |\mathcal{F}| \mid \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > N_0. \exists a \in S \ g(n) = a\}$ تعریف می‌شود، و در آن S زیر مجموعه ای متناهی از $|\mathcal{F}|$ است. در واقع در اینجا نیز می‌توان $\mathcal{F}_S^\omega$ را مجموعه‌ی تمام دنباله‌های متناهی از اعضای $\mathcal{F}$ در نظر گرفت که به اعضای چون $g_n \in S$ ختم می‌شوند. به عبارت دیگر می‌توان گفت $\mathcal{F}_S^\omega = \{g \in |\mathcal{F}^\omega| \mid |g| = n \Rightarrow g_n \in S \subseteq |\mathcal{F}|\}$.

نتیجه‌ی قضیه‌ی ۴.۲:

ساخت $\mathcal{F}_S^\omega$ ، FA -نمایش‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی متناهی S تحت روابط و توابع اتمی ساخت $\mathcal{F}$ بسته باشد.

اثبات این مطلب مانند قضیه‌ی ۴.۲ است.

قضیه‌ی ۵.۲: اگر ساخت $\mathcal{F}$ نامتناهی و FA -نمایش‌پذیر باشد، آنگاه ساخت $\mathcal{F}^\omega$ ضعیفاً FA -نمایش‌پذیر است. اثبات این مطلب هم کاملاً مثل اثبات قضیه ۴.۲ است، با این تفاوت که در قسمت اول آن، جمله σ که معرف

اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ است توسط اتوماتون متناهی تصمیم پذیر نیست، چراکه سوری وجودی در آن مقید نیست (چون مجموعه $\mathfrak{F}^\omega$ نامتناهی است). پس نمی توان FA نمایشی برای اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ از روی نمایش اعضای $\mathfrak{F}$ بدست آورد.

گروه R_k به صورت زیر تعریف می شود:

$R_k = \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] = \{zk^{-i} | z \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$ در واقع این گروه چیزی جز چند جمله ای هایی با ضرایب صحیح نیستند که در آنها متغیر x را با $\frac{1}{k}$ مقداردهی کرده ایم. و نیز گروه $\mathbb{Z}(K^\infty)$ با معادله $\mathbb{Z}(K^\infty) = R_k/\mathbb{Z}$ تعریف می شود.

بر حسب تعاریف فوق احکام زیر را داریم:

۱- گروه $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_m$ که اعضای آن دنباله های متناهی از $\mathbb{Z}_m$ است و عمل جمع روی آن مولفه به مولفه صورت می گیرد، FA نمایش پذیر است.

۲- گروه پروفرا^۱ یا همان $\mathbb{Z}(K^\infty)$ ، FA نمایش پذیر است.

۳- گروه R_k برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، FA نمایش پذیر است.

اثبات ۱: گروه $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_m$ را می توان به صورت $(\mathbb{Z}_m)^\omega$ در نظر گرفت چون گروه $(\mathbb{Z}_m, +)$ یک ساخت متناهی است پس طبق قضیه ی ۴.۲، $(\mathbb{Z}_m)^\omega$ ، FA نمایش پذیر است.

اثبات ۲:

گروه $\mathbb{Z}(K^\infty)$ را می توان به صورت چند جمله ای هایی با ضرایب صحیح که مقدار ثابت آنها صفر است در نظر گرفت که در آنها متغیر x را با $\frac{1}{k}$ مقداردهی کرده ایم. یعنی می توان $\mathbb{Z}(K^\infty) = (\mathbb{Z}[x]/\mathbb{Z})|_{x=\frac{1}{k}}$ در نظر گرفت که معادل است با گروه $(\mathbb{Z}_\circ)^\omega$ که طبق تعریفی که در بالا برای $\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{F}^\omega}$ کردیم عبارت است از همه دنباله های متناهی از اعضای $\mathbb{Z}$ که از جایی به بعد صفر هستند. از آنجا که $\{0\}$ نسبت به عمل گروه بسته است، طبق نتیجه ی قضیه ی ۴.۲ این ساخت FA نمایش پذیر است.

البته اثباتی که در مقاله اصلی برای این قضیه ذکر شده است، اثباتی مستقیم است که آوردن آن در اینجا خالی از

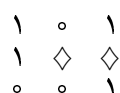
لطف نیست.

^۱ Prufer

ابتدا فرض کنید که $k = 2$. الفبای $\Sigma = \{0, 1, \diamond\}$ را در نظر می گیریم. مانند آنچه در مورد مثال ۱.۲ در ابتدای این فصل گفته شد اعضای این ساخت با رشته های دودویی که به ۱ ختم می شوند نمایش داده می شوند. (دقیقاً مثل ساخت $(\mathbb{N}, +)$) با این تفاوت که در اینجا اولین رقم معنی دار، اول می آید. برای مثال رشته 001 عدد $1/8$ را نمایش می دهد. مثل گذشته رشته تهی، صفر را نمایش می دهد. یک اتوماتون متناهی صحت جمع را که از طریق روال بیت انتقالی صورت گرفته می تواند بیازماید. توجه داشته باشید که در اینجا بیت انتقالی به سمت چپ می رود. چپ ترین بیت نقلی نادیده گرفته می شود. به طور مثال این اتوماتون

$$[1/8] = [1/2] + [5/8]$$

را به وسیله پذیرش رشته زیر تحقیق می کند.



بنابراین برای $\mathbb{Z}(K^\infty)$ الفبای این اتوماتون $\{0, \dots, k-1, \diamond\}$ است.

اثبات ۳:

گروه R_k برای هر $k \in \mathbb{Z}$ را می توان به صورت $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(K^\infty)$ در نظر گرفت. در مثال ۱.۲ نشان دادیم که $(\mathbb{N}, +)$ ، FA نمایش پذیر است و نیز در مثال ۳.۲.۱ در فصل گذشته نشان دادیم که ساخت $(\mathbb{Z}, +)$ در ساخت $(\mathbb{N}, +)$ تعبیر پذیر است. پس طبق قضیه ۳.۲ $(\mathbb{Z}, +)$ ، FA نمایش پذیر است. به علاوه در قسمت ۲ همین مثال نشان دادیم که $\mathbb{Z}(K^\infty)$ ، FA نمایش پذیر است. طبق قضیه ۱.۲ ب، ضرب هر دو ساخت FA نمایش پذیر، FA نمایش پذیر است. چون $R_k = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(K^\infty)$ ، پس R_k ، FA نمایش پذیر است.

در اینجا مثل قسمت ۲ مقاله اصلی اثباتی مستقیم ولی نسبتاً طولانی را در حالت خاص $k = 3$ آورده است. که در اینجا اشاره مختصری به آن می کنیم: می توان FA نمایش هایی را برای $(\mathbb{N}, +)$ و $\mathbb{Z}(K^\infty)$ به انضمام هم بکاربرد، ولی این بار بدون نادیده گرفتن چپ ترین بیت نقلی. می توان از دو رویکرد استفاده نمود که رویکرد اول برای قسمت صحیح بوسیله نمایش باینری است و رویکرد دوم برای قسمت کسری است. برای مثال اگر $k = 3$ باشد، آنگاه عنصر $17/27 + 14$ به وسیله رشته زیر نمایش داده می شود:



هنگام جمع کردن ، بیت نقلی برای قسمت کسری به چپ می رود ولی برای قسمت صحیح به راست می رود.

برای مثال اتوماتون $16\frac{8}{27} = 1\frac{2}{3} + 14\frac{17}{27}$ را به وسیله رشته زیر تحقیق می کند:

◇ ۱ ۱ ۱ (نمایش عدد ۱۴ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده است)
 ◇ ۲ ۲ ۱ (نمایش عدد ۱۷/۲۷ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده است)

◇ ۱ (نمایش عدد ۱ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده است)
 ◇ ۲ (نمایش عدد ۲/۳ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده است)

۱ ۰ ۰ ۰ (نمایش عدد ۱۶ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده است)
 ◇ ۲ ۲ (نمایش عدد ۸/۲۷ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده است)

در نهایت می توان یک FA نمایش برای R_k از طریق ضرب ساخت دو گروه بدست آورد.

FA نمایش ناپذیری

قضیه ۶.۲: ساخت های $(\mathbb{Q}, .)$ و $(\mathbb{Z}, .)$ FA نمایش پذیر نیستند.

اگر $(\mathbb{N}, +)^r$ در ساختی مثل لاگنجانه شود، (تعبیر شود) آنگاه تعداد حالات اتوماتون متناهی (غیر قطعی) که ساخت FA را FA نمایش می دهد، (یعنی این اتوماتون به ازای هر فرمول درجه اول با k متغیر آزاد و هر k تایی مرتب از اعضای $\mathbb{N}$ تصمیم می گیرد که این فرمول به ازای این k تایی در ساخت $\mathbb{N}$ درست است یا خیر) ضریبی از r خواهد بود. از آنجا که $(\mathbb{N}, +)^r$ به ازای هر $r \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ گنجانده می شود، پس اگر $(\mathbb{Z}, .)$ توسط اتوماتونی متناهی FA نمایش داشته باشد، تعداد حالات این اتوماتون از هر عدد طبیعی بزرگتر است. و این متناقض با تعریف اتوماتون متناهی است. (چرا که اتوماتون متناهی باید تعداد حالات متناهی داشته باشد)

برای درک اینکه چرا $(\mathbb{N}, +)^r$ به ازای هر $r \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ گنجانده می شود، توجه کنید که تابعی چون $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(n) = k^n$ که در آن k عددی صحیح و مثبت است، یک تک‌ریختی از ساخت $(\mathbb{N}, +)$ به ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ است. چراکه این تابع عمل جمع را حفظ می کند یعنی اگر $a + b = c$ به ازای اعداد $a, b, c \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{N}, +)$ درست باشد، آنگاه معادله‌ی $f(a).f(b) = f(c)$ به ازای اعداد $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{Z}$ در ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ درست است چراکه داریم:

$$f(a).f(b) = k^a.k^b = k^{a+b} = k^c = f(c)$$

چون به ازای هر عدد k صحیح مثبت چنین نگاشت یک به یکی (چرا که داریم: $f(a) = f(b) \Rightarrow k^a = k^b \Rightarrow \text{Ln}(k^a) = \text{Ln}(k^b) \Rightarrow a = b$) یک تک‌ریختی از ساخت $(\mathbb{N}, +)$ به ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ است، پس $(\mathbb{Z}, .)$ حاوی تعداد نامتناهی زیرساخت، همریخت با $(\mathbb{N}, +)$ است همین استدلال را می توان در مورد ساخت $(\mathbb{Q}, .)$ نیز بکار بست و نشان داد که $(\mathbb{Q}, .)$ نیز حاوی تعداد نامتناهی زیرساخت، همریخت با $(\mathbb{N}, +)$ است لذا نمی توان برای آن FA -نمایشی بدست آورد.

قضایایی در باب ضعیفاً FA -نمایش پذیری

قضیه‌ی ۷.۲:

ساخت $(\mathbb{Q}, +)$ ، FA -نمایش پذیر ضعیف است.

اثبات:

مطابق تعریف $\mathfrak{F}$ برای ساخت $\mathfrak{F}$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ را می توان $(\mathbb{Z}, +)^{\omega}$ در نظر گرفت پس طبق قضیه ۵.۲ $(\mathbb{Q}, +)$ FA -نمایش پذیر ضعیف است. (چراکه ساخت $(\mathbb{Z}, +)$ ساختی نامتناهی و FA -نمایش پذیر است). در مقاله اصلی این قضیه با معرفی یک FA -نمایش ضعیف از $(\mathbb{Q}, +)$ مستقیماً اثبات شده است، که ذکر آن در اینجا خالی از لطف نیست.

مثال ۳.۲: یک FA -نمایش ضعیف برای ساخت $(\mathbb{Q}, +)$:

هر عدد $p \in \mathbb{Q}$ را می توان به صورت $p = z + q$ در نظر گرفت که در آن $0 \leq (q \in \mathbb{Q}) < 1$ ، $z \in \mathbb{Z}$. هر کسر

$0 \leq (q \in \mathbb{Q}) < 1$ را می توان به صورت یک بسط فاکتوریلی منحصر به فرد به صورت $q = \sum_{i=1}^N a_i/i!$ در نظر گرفت که در آن a_i عدد طبیعی است بطوریکه $0 \leq a_i < i$. برای روشن شدن اینکه هر کسر واقعی q را می توان بدین صورت در نظر گرفت، فرض کنید $q = n/m$ در این صورت خواهیم داشت $q = \frac{n.(m-1)!}{m.(m-1)!} = \frac{n.(m-1)!}{m!}$ فرض کنیم $r = n.(m-1)!$ در این صورت $r < m \vee r \geq m$. اگر $r < m$ باشد نمایش طبق شرایط آن بدرستی صورت گرفته است. ولی اگر $r \geq m$ طبق لم تقسیم داریم $r = s.m + t$ که در آن $0 \leq t < m$ پس داریم $q = \frac{r}{m!} = \frac{(s.m+t)}{m!} = \frac{s}{(m-1)!} + \frac{t}{m!}$ با تکرار همین روند برای $\frac{s}{(m-1)!}$ ، نمایش شرح داده شده در بالا را برای هر عدد q بدست می آوریم. پس به طور خلاصه می توان گفت که هر عدد $p \in \mathbb{Q}$ را می توان به صورت (z, q) که در آن $0 \leq (q \in \mathbb{Q}) < 1$ ، $z \in \mathbb{Z}$ نمایش داد.

به علاوه چون $q = \sum_{i=1}^N a_i/i!$ پس به صورت دقیقتر می توان گفت $p = (z, \sum_{i=1}^N a_i/i!)$.

عمل جمع برای دو عدد $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$ مولفه به مولفه صورت می گیرد. یعنی داریم :

$$p_1 + p_2 = (z_1, \sum_{i=1}^N a_i/i!) + (z_2, \sum_{i=1}^N b_i/i!) = (z_1 + z_2, \sum_{i=1}^N (a_i + b_i)/i!) = (z_3, \sum_{i=1}^N d_i/i!) = p_3$$

بسط های فاکتوریلی که در بالا نمایش داده شده است به صورت طبیعی انجام می گیرد. یعنی داریم

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)/i! = \sum_{i=1}^N a_i/i! + \sum_{i=1}^N b_i/i!$$

بیت نقلی c_{i+1} داشته باشیم، داریم : $d_i = c_{i+1} + a_i + b_i$ اگر فقط اگر $c_{i+1} + a_i + b_i < i$ و $c_i = 0$ و در

غیر اینصورت داریم: $d_i = c_{i+1} + a_i + b_i - i$ و $c_i = 1$. با بکار بستن این روش می توان جمع دوسری

متناهی $\sum_{i=1}^N a_i/i!$ و $\sum_{i=1}^N b_i/i!$ را با استفاده از یک اتوماتون متناهی انجام داد. بنابراین می توان درستی جمع

$p_3 = p_1 + p_2$ را توسط اتوماتونی متناهی آزمود. لذا ساخت $(\mathbb{Q}, +)$ ضعیفاً FA نمایش پذیر است.

فصل سوم

ساختارهای جبری FA - نمایش پذیر

۱.۳ قضایای FA - نمایش پذیر در باب گروههای آبدلی

قضیه ۱.۳:

اگر گروه آبدلی A دارای یک زیر گروه FA -نمایش پذیر چون $\mathcal{B}$ باشد به طوری که اندیس $\mathcal{B}$ در A متناهی باشد، آنگاه A نیز FA -نمایش پذیر است.

اثبات:

مجموعه هم دسته های $\mathcal{B}$ در A را در نظر بگیرید. چون طبق فرض اندیس $\mathcal{B}$ در A متناهی است، پس تعداد اعضای این مجموعه متناهی خواهد بود. یعنی داریم $\{a\mathcal{B} \mid a \in A\} = \{e\mathcal{B}, a_1\mathcal{B}, \dots, a_n\mathcal{B}\}$ که در آن $a_i \notin \mathcal{B}$. چون A آبدلی فرض شده پس هر زیر گروه آن نرمال است. یعنی مجموعه‌ی این هم دسته ها با عمل ضرب القاء شده از A تشکیل یک گروه می دهند، که طبق فرض متناهی است. اما طبق قضیه ۱.۲ الف هر ساخت متناهی، FA -نمایش پذیر است پس گروه هم دسته های زیر گروه $\mathcal{B}$ ، FA -نمایش پذیر است. می دانیم که رابطه هم دسته بودن در A یک رابطه هم ارزی است پس هر عضو از A فقط در یک هم

چون G گروهی آبلی است، پس گروه $A \cdot \mathfrak{B}$ که به صورت $A \cdot \mathfrak{B} = \{xy | x \in A, y \in \mathfrak{B}\}$ یک زیر گروه از گروه G است و می توان هر گروه $A \cdot \mathfrak{B}$ را به صورت زوج مرتبی چون (a, b) نمایش داد که در آن $a \in A, b \in \mathfrak{B}$ ولی با این طرز نمایش از اعضای گروه $A \cdot \mathfrak{B}$ ، اعضایی که در $A \cap \mathfrak{B}$ هستند، دارای چند نمایش می شوند، که رابطه تساوی برای این نمایشهای مختلف از یک عضو قابل تصمیم گیری نیست. برای درک این مطلب فرض کنید $u, v \in A \cap \mathfrak{B}$ باشد چون $A \cap \mathfrak{B}$ خود یک گروه است uv نیز عضوی از $A \cap \mathfrak{B}$ است. ولی این عنصر (یعنی uv) دارای دو نمایش متفاوت (u, v) و (v, u) خواهد بود. مشخص است که $(u, v) = (v, u)$ چرا که $u.v = v.u$ ولی عمل ضربی که در این جمله به کار رفته است ضرب دو عضو از گروه G است که معلوم نیست تصمیم پذیر باشد. در ضمن این ضرب نمی تواند به عنوان ضرب گروه A یا گروه $\mathfrak{B}$ در نظر گرفته شود چرا که مثلاً در طرف چپ تساوی (یا در طرف راست آن) شاهد ضرب دو عضو از یکی از این گروهها نیستیم. ولی می توان با حذف این اشتراکات از یکی از این دو گروه تضمین نمود که اشتراک A با گروه $\mathfrak{B}'$ (که از حذف $A \cap \mathfrak{B}$ از $\mathfrak{B}$ بدست می آید)، تنها، عنصر همانی است. یعنی $A \cap \mathfrak{B}' = \{e\}$ و در این صورت می توان هر عنصر $A \cdot \mathfrak{B}'$ را به صورت منحصر به فرد توسط زوج مرتبها نمایش داد. و به علاوه $A \cdot \mathfrak{B}'$ شامل تمام اعضای $A \cdot \mathfrak{B}$ می شود. برای این منظور چون $A \cap \mathfrak{B}$ زیر گروهی نرمال از $\mathfrak{B}$ است (چون گروه G آبلی است هر زیر گروه آن، نرمال است) $\mathfrak{B}'$ را برابر $\frac{\mathfrak{B}}{A \cap \mathfrak{B}}$ قرار می دهیم. در این صورت همه ی اعضایی از $\mathfrak{B}$ که در A نیز هستند، برابر e خواهند شد. طبق قضیه دوم ایزومورفیسم داریم: $A \cdot \mathfrak{B} \cong A \times \frac{\mathfrak{B}}{A \cap \mathfrak{B}} \Rightarrow \frac{A \cdot \mathfrak{B}}{A} \cong \frac{\mathfrak{B}}{A \cap \mathfrak{B}}$ چون طبق فرض $A \cap \mathfrak{B}$ تصمیم پذیر کارآمد است پس مجموعه ی $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{B}}{A \cap \mathfrak{B}}$ ، FA -نمایش پذیر است. حال چون $\mathfrak{B}$ ، FA -نمایش پذیر است، پس هر یک از اعضای آن روی الفبای متناهی چون $\Sigma_{\mathfrak{B}}$ در زبان منظم $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ قابل نمایش است. نمایش $\mathfrak{B}'$ را از روی نمایش گروه $\mathfrak{B}$ چنین می سازیم، که برای هر عضو $x \in \mathfrak{B}$ طبق فرض می توان به طور کارآمد مشخص کرد که $x \in A \cap \mathfrak{B}$ یا خیر. اگر $x \in A \cap \mathfrak{B}$ باشد آنگاه x را با دنباله نمایش e از گروه $\mathfrak{B}$ نمایش می دهیم. و در غیر این صورت x را با دنباله نمایش خودش در $\mathfrak{B}$ نمایش می دهیم. در این صورت اعضای $\mathfrak{B}'$ در زبان منظمی چون $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{B}}$ که زیر مجموعه $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ است، قابل نمایش است. چون $\mathfrak{B}$ ، FA -نمایش پذیر است، پس طبق تعریف FA -نمایش پذیری، عمل ضرب گروه برای نمایش اعضای $\mathfrak{B}$ در زبان $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ تصمیم پذیر

است. پس متعاقباً عمل ضرب در گروه $\mathcal{B}'$ برای نمایش اعضای $\mathcal{B}'$ در $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{L}'_{\mathcal{B}}$ ، تصمیم پذیر است. یعنی $FA, \mathcal{B}'$ نمایش پذیر است. چون $A \cdot \mathcal{B} = A \times \mathcal{B}'$ و نیز چون هر دو گروه A و $\mathcal{B}'$ ، FA نمایش پذیرند پس طبق قضیه ۱.۲ ب، حاصل ضرب آنها که همان گروه $A \cdot \mathcal{B}$ است، نیز FA نمایش پذیر است.

تعریف گروههای $\langle p^{-\infty} a \rangle$:

فرض کنید e_0 و e_1 اعضای پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{Q}^2$ باشند و نیز p_1, p_2, q اعداد اول متمایزی باشند و $a \in \mathbb{Q}^2$ ، در این صورت گروه تولید شده توسط مجموعه $\{ap^{-i} | i \in \mathbb{N}\}$ را که همان $\mathfrak{R}_p$ است به صورت $\langle p^{-\infty} a \rangle$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۳:

۱- گروه $\langle p_1^{-\infty} e_0, p_2^{-\infty} e_1 \rangle$ نمایش پذیر است.

۲- گروه $\langle p_1^{-\infty} e_0, p_2^{-\infty} e_1, q^{-\infty} (e_0 + e_1) \rangle$ نمایش پذیر است.

اثبات ۱:

در واقع هر یک از گروههای $\langle p_i^{-\infty} e_j \rangle$ در واقع حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح است که در آنها متغیر x با $1/(p_i)$ مقدار دهی شده است. یعنی $\langle p_i^{-\infty} e_j \rangle \cong \mathbb{Z}[x]_{x=1/p_i}$ طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی ۴.۲ این معادل است با $\mathbb{Z}_0^\omega[1/p_i]$ که FA نمایش پذیر است. پس هر یک از گروههای $\langle p_1^{-\infty} e_0 \rangle, \langle p_2^{-\infty} e_1 \rangle$ ، FA نمایش پذیر است. ولی برای اثبات آنکه گروه تولید شده بوسیله هر دو این گروه‌ها خود FA نمایش پذیر است از قضیه‌ی ۱.۳ استفاده می‌کنیم. چون هر یک از این گروه‌ها در $\langle p_1^{-\infty} e_0, p_2^{-\infty} e_1 \rangle$ دارای اندیس متناهی ۲ است، پس طبق این قضیه $\langle p_1^{-\infty} e_0, p_2^{-\infty} e_1 \rangle$ نمایش پذیر است.

توجه کنید که هر عضو $\langle p^{-\infty} \rangle$ در واقع نمایش عدد گویایی چون r در مبنای p است. چرا که داریم $r = a_0 + a_1/p + a_2/p^2 + \dots + a_n/p^n$ و در نتیجه گروه $\mathfrak{R}_p$ مجموعه تمام اعداد گویایی است که دارای بسط متناهی در مبنای p هستند. به علاوه توجه کنید که اگر عدد $1 < r < \infty$ در مبنای عدد اول p_1 دارای بسط متناهی باشد، آنگاه این عدد در مبنای عدد اول دیگری چون p_2 دارای بسط نامتناهی است. برای روشن شدن این مطلب فرض کنید $1 < r < \infty$ نمایش متناهی در مبنای p_1 داشته باشد یعنی

داریم $r = a_1/p_1 + a_2/p_1^2 + \dots + a_n/p_1^n = z_1/p_1^n$ که در آن z_1/p_1^n از مخرج مشترک گیری کسرهای $a_1/p_1 + a_2/p_1^2 + \dots + a_n/p_1^n$ به دست آمده است و لذا $z_1 \in \mathbb{Z}$. حال بر خلاف ادعا، فرض کنید که r در مبنای عدد اول دیگری چون p_2 نیز دارای بسط متناهی باشد طبق توضیحات بالا داریم، $r = z_2/p_2^m$ پس خواهیم داشت $r = z_2/p_2^m = z_1/p_1^n$ که در آن $0 < r < 1$ با $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ طرفین وسطین کردن این رابطه تساوی داریم $(z_1)p_2^m = (z_2)p_1^n$ پس $p_1^n | (z_1)p_2^m$ چون p_1, p_2 اول در نظر گرفته شده اند پس نسبت به هم اول هستند. پس داریم $p_1^n | (z_1)$ بنابراین $z_1/p_1^n \geq 1$ اما این همان نمایش عدد $0 < r < 1$ طبق فرض بود، بنابراین فرض خلف باطل و ادعا اثبات می گردد. لذا $\mathfrak{R}_{p_1} \cap \mathfrak{R}_{p_2} = \mathbb{Z}$ (یعنی $r = 0$).

اثبات ۲:

اگر $\mathcal{A} = \langle p_1^{-\infty}e_0, p_2^{-\infty}e_1 \rangle$ و $\mathcal{B} = \langle q^{-\infty}(e_0 + e_1) \rangle$ قرار دهیم آنگاه طبق توضیحات بالا $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(e_0 + e_1)$ یعنی $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ تصمیم پذیر کارآمد است پس طبق قضیه ۲.۳ گروه $\langle p_1^{-\infty}e_0, p_2^{-\infty}e_1, q^{-\infty}(e_0 + e_1) \rangle$ نمایش پذیر است. FA توجه به این نکته اساسی است که نمی توانستیم این قضیه را با استفاده از قضایای مربوط به ساختهای FA نمایش پذیر و نیز قضیه ی ۱.۳ اثبات کنیم.

۱.۱.۳ قضایای FA نمایش پذیری در باب گروه های ناآبلی

تعریف: فرض کنید $\mathcal{C}$ خاصیتی در مورد گروه ها باشد، گروه G را موضعاً $\mathcal{C}$ متناهی گوئیم اگر فقط اگر G دارای زیرگروه نرمالی با خاصیت $\mathcal{C}$ مثل $\mathcal{H}$ باشد بطوریکه اندیس $\mathcal{H}$ در G متناهی است. بنابراین گروه G را موضعاً آبلی متناهی می گوئیم اگر G دارای زیرگروه نرمالی آبلی ای با اندیسی متناهی در G باشد.

قضیه ۳.۳ :

هر گروه G که متناهی التولید موضعاً آبلی متناهی باشد، FA نمایش پذیر است.

اثبات:

اثبات این قضیه دقیقاً مثل قضیه ۱.۳ است به شرط آنکه ثابت کنیم G دارای زیرگروهی FA -نمایش پذیر با اندیس متناهی است. چون G موضعاً آبلی متناهی است، پس دارای زیرگروه نرمال آبلی چون $\mathfrak{B}$ است که اندیس آن در G متناهی است. چون G متناهی تولید است پس $\mathfrak{B}$ نیز چنین است. حال طبق قضیه ی رده بندی گروههای آبلی متناهی تولید، $\mathfrak{B}$ ایزومورف با گروهی چون $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ است که در آن m و m_i ها اعدادی طبیعی هستند. گروه $(\mathbb{Z}^m, +)$ (بنابر آنچه که در مثال ۱.۲ آمده و نیز تعبیرپذیری $(\mathbb{Z}^m, +)$ در $(\mathbb{N}, +)$) FA -نمایش پذیر است. و نیز گروه $\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ نیز متناهی است و بنابراین FA -نمایش پذیر است. طبق قضیه ی ۱.۲ ب ضرب دو گروه FA -نمایش پذیر، FA -نمایش پذیر است. پس در کل $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ FA -نمایش پذیر است و متعاقب آن $\mathfrak{B}$ ، FA -نمایش پذیر است. بقیه اثبات دقیقاً مانند قضیه ی ۳.۱ است.

قضیه ۴.۳:

فرض کنید G یک گروه نامتناهی FA -نمایش پذیر باشد، در این صورت هر زیرگروه متناهیاً تولید شده از G چون $\mathcal{H}$ موضعاً آبلی متناهی است. و به علاوه مرتبه غیر تابی قسمت آبلی $\mathcal{H}$ حداکثر برابر $(k+1)(\log(|\Sigma|))$ است که در آن Σ الفبایی است که اعضای G را با آن نمایش داده ایم و k تعداد حالت های اتوماتونی است که عمل گروه G را تصمیم می گیرد.

اثبات:

برای این منظور به مفاهیمی در مورد گروه های پوچ توان احتیاج داریم.

گروه G پوچ توان مرتبه ۱ است اگر و فقط اگر G آبلی باشد. (یعنی $Z(G) = G$) G پوچ توان از مرتبه $n+1$ است اگر و فقط اگر $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ توان از مرتبه n باشد. ما همچنین به نسخه ای از گروه هایسنبرگ^۱ که با نمایش داده می شود، احتیاج داریم چرا که با گروه پوچ توان آزاد از مرتبه ۲ ایزومورف است.

$$UT_3(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حال به اثبات قضیه می پردازیم:

هر زیرگروه $\mathcal{H} \leq G$ که با $\{g_1, \dots, g_r\}$ تولید شده باشد یک گسترش چند جمله ای به صورت

^۱ Heisenberg

$\{t(g_1, \dots, g_r) \mid t \in F(x_1, \dots, x_n), |t| \leq n\}$ (یعنی تمام اعضای گروه آزاد بوجود آمده از x_1 تا x_n که اندازه‌ی آنها کوچکتر مساوی n است) دارد که دارای اندازه‌ی برابر با چندجمله‌ای از مرتبه n است. بنابراین طبق قضیه گرموف^۲ [۵]، $\mathcal{H}$ موضعاً پوچ توان متناهی است. اگر $G = \mathcal{H}$ یعنی وقتی که G خودش متناهی التولید باشد می توان بحث را چنین دنبال نمود: اگر G موضعاً متناهی آبلی نباشد در این صورت با استفاده از قضیه‌ای که در مرجع [۲۳] بدان اشاره شده، G دارای نظریه‌ای تصمیم ناپذیر است. ولی نظریه‌ی یک ساخت FA نمایش پذیر طبق خاصیت تفحص ارزیابی تصمیم پذیر است بنابراین G موضعاً آبلی متناهی است.

با استفاده از نتایجی که در مورد گروههای پوچ توان در مرجع [۲۳] اثبات شده است، یک گروه موضعاً پوچ توان متناهی، یا در UT_3 گنجانده می شود و یا موضعاً آبلی متناهی است. اصل جزئیاتی که در این پایان نامه به این اثبات اضافه می شود آن است که نشان دهیم هر گروه G ای که در UT_3 گنجانده شود FA نمایش پذیر نیست، چرا که در این صورت یک FA نمایش ضعیف از $(\mathbb{N}, \cdot)$ بدست خواهد آمد که مغایر با قضیه‌ی ۲.۶ است. چرا که $UT_3(\mathbb{Z})$ نمایشی به صورت $1 < a, b, q : aba^{-1}b^{-1} = q, aqa^{-1}q^{-1} = bqb^{-1}q^{-1} = 1$ دارد که در آن a, b, q ماتریسهای زیر هستند:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

پس $a^m b^n a^{-m} b^{-n} = q^{mn}$ برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ درست است. ملکوف در مرجع [۱۶] از این واقعیت بهره برد تا بتواند $(\mathbb{Z}, \cdot)$ در $UT_3(\mathbb{Z})$ تعبیر کند. در این تعبیر، q^m یک عدد صحیح m را نشان می دهد. برای تعریف ضرب به صورت درجه اول $x = ubu^{-1}b^{-1} \wedge y = avu^{-1}v^{-1} \wedge z = uvu^{-1}v^{-1}$ که $\sigma : \exists u, v \in C(q)$ در آن مرکز ساز عنصر q در گروه $UT_3(\mathbb{Z})$ است. اگر $x = q^m, y = q^n$ باشند که m, n دو عدد صحیح هستند آنگاه جمله σ در $UT_3(\mathbb{Z})$ درست است. و شاهد این مدعا $x = a^m, v = b^n$ است. حال بر خلاف، فرض کنید $UT_3(\mathbb{Z})$ قابل گنجاندن در گروه FA نمایش پذیر G باشد، در این صورت باتوجه به توضیحات بالا گروه $(\mathbb{Z}, \cdot)$ را می توان در G ضعیفاً نمایش داد که این متناقض با FA نمایش ناپذیر بودن $(\mathbb{Z}, \cdot)$ است.

۲.۱.۳ قضایای FA -نمایش پذیری در باب حلقه‌ها و میدانها

قضیه ۵.۳:

فرض کنید β ساختی FA -نمایش پذیر باشد و نیز فرض کنید β زیر ساختی از β باشد. در این صورت β دارای یک FA -نمایش ضعیف است.

توجه کنید که زیر ساخت β لزوماً در β تعبیر پذیر نیست و در ضمن این قضیه بدان معنا نیست که β ، FA -نمایش پذیر نیست و فقط وجود یک FA -نمایش ضعیف را برای ساخت β تضمین می کند.

برهان: طبق تعریف FA -نمایش پذیری ضعیف کفایت ثابت کنیم که هر رابطه اتمی و نیز رابطه تساوی در ساخت β تصمیم پذیر کارآمد است. (اگر به علاوه نشان می دادیم که اعضای β در زبانی منظم قابل نمایش هستند، می توانستیم حکم کنیم که β ، FA -نمایش پذیر است. ولی با مفروضات مساله این امر میسر نیست.)

هر رابطه اتمی در β یک رابطه اتمی در β نیز هست و به علاوه چون β زیر ساختی از β است. یعنی $|\beta| \subseteq |\beta|$. پس هر k تایی مرتب از اعضای β میتواند به عنوان یک k تایی مرتب از اعضای β در نظر گرفته شود. اما طبق فرض β ساختی FA -نمایش پذیر است. یعنی به ازای هر رابطه k موضعی $\mathfrak{R}_k$ و هر k تایی مرتب از اعضای β مثل $(a_1, \dots, a_k), \mathfrak{R}_k(a_1, \dots, a_k)$ تصمیم پذیر کارآمد است. پس چون هر رابطه اتمی β ، می تواند به عنوان یک رابطه اتمی β تلقی شود و هر چند تایی مرتب از اعضای β می تواند به عنوان چند تایی مرتب از اعضای β در نظر گرفته شود و نیز این که هر رابطه اتمی در β به ازای هر چند تایی مرتب از اعضای آن تصمیم پذیر است، لذا هر رابطه اتمی k موضعی $\mathfrak{R}_k$ در ساخت β به ازای هر k تایی مرتب از اعضای آن، تصمیم پذیر کارآمد است. به علاوه رابطه تساوی بین اعضای ساخت β همان رابطه تساوی بین اعضای ساخت β است که به مجموعه (نوعاً تعریف ناپذیر) $|\beta|$ تحدید شده است. لذا β ضعیفاً FA -نمایش پذیر است.

قضیه ۶.۳:

هر حلقه‌ی یکدار FA -نمایش پذیر، مشخصه‌ی غیر صفر دارد.

برهان:

برعکس، فرض کنید حلقه‌ی یک‌دار FA —نمایش‌پذیر $(R, \cdot_R, +_R, \setminus_R, \circ_R)$ ، دارای مشخصه‌ی صفر باشد.

نشان می‌دهیم که ساخت $(\mathbb{Z}, \times)$ یکریخت با زیرساختی از R است. تابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow R$ را با ضابطه $f(z) = z \setminus_R$

که در آن $\setminus_R$ عنصر همانی ضرب حلقه R است و نیز منظور از $z \setminus_R$ عبارتست از:

$$\begin{aligned} z > \circ & \quad z \setminus_R = \underbrace{\setminus_R + \setminus_R + \dots}_{z\text{-times}} \\ z < \circ & \quad z \setminus_R = \underbrace{(-\setminus_R) + (-\setminus_R) + \dots}_{z\text{-times}} \\ z = \circ & \quad z \setminus_R = \circ_R \end{aligned}$$

در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم f یک تک‌ریختی از $\mathbb{Z}$ به $\mathfrak{R}$ است. باید نشان دهیم برای هر دو عنصر $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

داریم:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) - \setminus$$

$$f(z_1 \times z_2) = f(z_1) \cdot_R f(z_2) - \setminus$$

$$f(z_1) = f(z_2) \rightarrow z_1 = z_2 - \setminus$$

اثبات ۱:

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= (z_1 + z_2) \setminus_R = \underbrace{(\setminus_R) + (\setminus_R) + \dots}_{z_1 + z_2\text{-times}} \\ &= f(z_1) + f(z_2) = \underbrace{\setminus_R + \setminus_R + \dots}_{z_1} + \underbrace{\setminus_R + \setminus_R + \dots}_{z_2} = z_1 \setminus_R + z_2 \setminus_R \end{aligned}$$

اثبات ۲:

$$\begin{aligned} f(z_1 \times z_2) &= (z_1 \times z_2) \setminus_R = \underbrace{\setminus_R + \setminus_R + \dots}_{z_1 \times z_2} \\ &= \underbrace{z_1 \setminus_R + z_1 \setminus_R + \dots}_{z_1\text{ times}} = z_1 \setminus_R (\underbrace{\setminus_R + \setminus_R + \dots}_{z_2\text{ times}}) \\ &= z_1 \setminus_R \cdot_R z_2 \setminus_R = f(z_1) \cdot_R f(z_2) \end{aligned}$$

اثبات ۳:

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow f(z_1 - z_2) = \circ \Rightarrow (z_1 + z_2) \setminus_R = \circ_R$$

اما طبق فرض R یک حلقه‌ی یکدار با مشخصه‌ی صفر است. یعنی

$$(z_1 - z_2) \cdot 1_R = 0_R \Rightarrow z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$$

یعنی تابع f یک به یک است. بنابراین f یک تک‌ریختی از $\mathbb{Z}$ به R است.

پس نشان دادیم که $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ در حد ایزومورفیسم یک زیرساخت از هر حلقه‌ی یکدار، بامشخصه‌ی صفر، مثل $(R, +_R, \cdot_R, 0_R, 1_R)$ است. پس اگر حلقه‌ی یکدار بامشخصه‌ی صفر R (طبق فرض) FA —نمایش‌پذیر باشد، $(\mathbb{Z}, \times)$ بعنوان یک زیرساخت آن FA —نمایش‌پذیر ضعیف خواهد بود. و این با قضیه ۶.۲ مبنی بر FA —نمایش‌پذیر نبودن $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ (چه قوی چه ضعیف) در تناقض است، پس فرض خلف غلط است، یعنی هر حلقه‌ی یکدار F نمایش‌پذیر، مشخصه‌ی ناصفر دارد.

قضیه ۷.۳:

هیچ میدان نامتناهی بامشخصه‌ی صفر نمیتواند FA —نمایش‌پذیر باشد.

برهان:

میدان F را میتوان به عنوان یک حلقه‌ی یکدار تلقی نمود. از آنجا که هیچ حلقه‌ی یکداری بامشخصه‌ی صفر نمیتواند FA —نمایش‌پذیر باشد. پس هیچ میدان نامتناهی بامشخصه‌ی صفر مثل F نمیتواند FA —نمایش‌پذیر باشد.

۲.۳ اتوماتون بوخی (Büchi)

یک اتوماتون بوخی، یک اتوماتون متناهی (غیر قطعی) است که به عنوان ورودی رشته‌ای نامتناهی روی

الفبای Σ خود را می‌پذیرد. زبان این اتوماتون مجموعه‌ی

$\{ \text{همه‌ی } w \in \Sigma^\omega \text{ که برای آنها اتوماتون (معمولاً در بی‌نهایت) با خواندن } w \text{ حداقل از یکی از حالات پذیرش} \}$

نهایی عبور کند

است. برای جزئیات بیشتر در مورد این اتوماتون به مرجع [۳۴] مراجعه نمایید.

بوخی ثابت کرد که زبان $\Sigma^\omega \subseteq \mathcal{L}$ توسط ماشین بوخی پذیرش می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{L}$ اجتماع متناهی از زبان‌ها به شکل UV^ω باشد که در آن $U, V \subseteq \Sigma^*$ هستند و نیز منظم‌اند. (یعنی توسط یک اتوماتون متناهی پذیرش می‌شوند) اگر زبان $V \subseteq \Sigma^*$ غیر تهی و منظم باشد آنگاه $|V^\omega| < 2^{\aleph_0}$ ایجاب می‌کند که $V^\omega = \{\gamma\}^*$ باشد که در آن γ رشته‌ای متناهی است. (برای درک این مطلب) توجه کنید که رابطه‌ی هم‌ارزی روی رشته‌های متناهی که بوسیله‌ی $\alpha \sim \beta \iff \exists i, j \quad \alpha^i = \beta^j$ تعریف می‌شود دارای کلاس‌های هم‌ارزی به شکل $\{\gamma\}^*$ است. اگر $|V^\omega| < 2^{\aleph_0}$ باشد در این صورت هر دو رشته در V با هم هم‌ارزند و بنابراین $V^\omega = \{\gamma\}^*$ که در آن $\{\gamma\}^*$ کلاس هم‌ارزی شامل V است.

قضیه‌ی بوخی حکم می‌کند که یک زیرمجموعه از Σ^ω ، بوخی – تشخیص پذیر است اگر و فقط اگر این زبان قابل تعریف در $S_1 S_\Sigma$ باشد یعنی تکین درجه‌ی دوم زبان یک تابع تالی روی Σ باشد (به مرجع [۳۴] مراجعه شود). خصوصاً این که، مجموعه‌های بوخی – تشخیص پذیر تحت متمم‌گیری بسته هستند.

۱.۲.۳ ساخت‌های بوخی – نمایش پذیر

با تغییرات طبیعی در تعریف FA – نمایش پذیری، ما به مفهوم بوخی نمایش پذیری برای ساخت‌ها دست خواهیم یافت (این ساخت‌ها ω – اتوماتیک نیز نامیده می‌شوند) از میان ساخت‌های متعدد که ω – اتوماتیک هستند می‌توان به جبر بول $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \varphi, \mathbb{N}, \cup, \cap, ')$ اشاره کرد. در این مثال الفبای ما $\{0, 1\}$ است و زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ را به صورت رشته‌های نامتناهی از صفر و یک در نظر می‌گیریم (اگر رشته‌ای با صفر شروع شود یعنی ۱ عضو آن زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ که این رشته نمایش آن است نیست و اگر این رشته با ۱ شروع شود یعنی ۱ عضو آن زیرمجموعه هست و قس‌الهذا). مثال‌های طبیعی دیگر شامل $(R, +)$ ، $(Z_p, +)$ و $(Q_p, +)$ می‌شود. $(R, +)$ و $(Q_p, +)$ بسیار حائز اهمیت‌اند چرا که هر دو گروه‌هایی آبلی روی یک فضای Q – برداری با بعد $2^{\aleph_0}$ هستند، در حالی که هنوز معلوم نیست $(Q, +)$ ، FA نمایش پذیر است یا خیر. با استفاده از روش‌های اثبات قضیه بوخی می‌توان نشان داد که خواص مهم ساخت‌های FA – نمایش پذیر از قبیل خاصیت تفحص ارزیابی و نیز تصمیم پذیری نظریه آنها، همچنان برای ساخت‌های بوخی – نمایش پذیر نیز صادق هستند.

۳.۳ پیچیدگی کلاس ساخت‌های FA – نمایش پذیر

ساخت $\mathbb{A}$ را در نظر بگیرید

رابطه k – موضعی R را در $\mathbb{A}$ تصمیم پذیر گوییم اگر به ازای هر $(a_1, \dots, a_k) \in |\mathbb{A}|^k$ بتوانیم تصمیم بگیریم $(a_1, \dots, a_k) \in R$ هست یا خیر. فرض کنید رابطه‌ی R توسط فرمولی چون $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ که در آن فقط x_1 تا x_k متغیر آزادند، در $\mathbb{A}$ تعریف شده باشد نیز فرض کنید ساخت $\mathbb{A}$ اصل پذیر متناهی است، یعنی مجموعه‌ای متناهی چون Γ از جملات درجه اول در زبان ساخت $\mathbb{A}$ چنان موجود باشد که برای هر جمله‌ی σ داشته باشیم

$$\models_{\mathbb{A}} \sigma \iff \Gamma \vdash \varphi(a_1, \dots, a_k)$$

در این صورت تصمیم‌پذیری رابطه‌ی R در ساخت $\mathbb{A}$ معادل این است که برای k تایی مرتب مثل $(a_1, \dots, a_k) \in |\mathbb{A}|^k$ مشخص کنیم $\varphi(a_1, \dots, a_k)$ از Γ نتیجه می‌شود یا خیر. به صورت دقیق‌تر یعنی:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff \models_{\mathbb{A}} \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \Gamma \vdash \varphi(a_1, \dots, a_k)$$

فرض کنید مجموعه‌ای چون Γ از جملات درجه اول داده شده است. $Cn\Gamma$ عبارتست از مجموعه‌ی همه جملات درجه اولی که به صورت منطقی از Γ استنتاج می‌شوند:

$$Cn\Gamma = \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$$

رابطه‌ی R را که برای هر k تایی منظم از $|\mathbb{A}|^k$ مثل $(a_1, \dots, a_x)$ در ساخت اصل‌پذیر متناهی چون $\mathbb{A}$ تصمیم پذیر است، رابطه‌ای بازگشتی روی $\mathbb{A}$ می‌گوییم و آنها را با Δ° نشان می‌دهیم.

رابطه τ روی $\mathbb{A}$ ، Σ° است اگر و فقط اگر رابطه‌ی بازگشتی چون R در $\mathbb{A}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم

$$\vec{a} \in \tau \iff \exists b \ (\vec{a}, b) \in R$$

رابطه‌ی S روی $\mathbb{A}$ ، Π° است اگر و فقط اگر رابطه‌ی بازگشتی چون R در $\mathbb{A}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم

$$\vec{a} \in S \iff \forall b \ (\vec{a}, b) \in R$$

حال اگر زبان را به منطق محمولات درجه دوم گسترش دهیم یعنی بتوانیم روی توابع و روابط (درواقع روی زیرمجموعه‌های ساخت $\mathbb{A}$) نیز سور بگذاریم. تعاریف بالا بصورت زیر در خواهند آمد:

ساخت $\mathbb{M}_1$ اصل‌پذیر متناهی درجه‌ی دوم است اگر مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه‌ی دوم چون Λ_0 چنان

$$\models_{\mathbb{M}_1} \sigma \iff \Lambda_0 \vdash \sigma \quad \text{موجود باشد که به ازای هر جمله‌ی درجه دوم چون } \sigma \text{ داشته باشیم:}$$

مجموعه‌ای از روابط k موضعی چون $\mathfrak{R}$ را که به ازای هر رابطه از $|\mathbb{M}_1|^k$ در ساخت اصل‌پذیر متناهی درجه‌ی دوم چون $\mathbb{M}_1$ تصمیم‌پذیر است، بازگشتی درجه دوم یا Δ_1 می‌نامیم.

مجموعه‌ای از روابط مثل T روی $\mathbb{M}_1$ ، Σ_1 است اگر فقط اگر مجموعه‌ای چون $\mathfrak{R}$ که Δ_1 است چنان موجود باشد که برای هر رابطه R داشته باشیم

$$.R \in T \iff \exists f \quad (R, f) \in \mathfrak{R}$$

مجموعه‌ای از روابط مثل S روی $\mathbb{M}_1$ ، Π_1 است اگر فقط اگر مجموعه‌ای چون $\mathfrak{R}$ که Δ_1 است چنان موجود باشد که به ازای هر رابطه R داشته باشیم

$$.R \in S \iff \forall f \quad (f, R) \in \mathfrak{R}$$

حال داریم:

مسئله‌ی یک‌ریختی برای دو ساخت FA - نمایش‌پذیر Σ_1 است.

ساخت α و β را در یک زبان در نظر بگیرید. α با β یک‌ریخت است اگر فقط گرتابعی چون f از $|\alpha|$ به $|\beta|$ $(f : |\alpha| \rightarrow |\beta|)$ چنان موجود باشد که شرایط زیر حفظ شوند:

$$1- f \text{ یک به یک و پوشا باشد } Rg(f) = |\beta| \quad \wedge \quad f(x) = f(y) \iff x = y$$

$$.Rgf = \{b \in |\beta| \mid \exists x \quad f(x) = b\}$$

۲- برای هر نماد رابطه‌ای k موضعی R در زبان ساخت α و β و هر k تایی منظم

از اعضای $|\alpha|$ داشته باشیم

$$.(a_1, \dots, a_k) \in R^\alpha \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in R^\beta$$

۳- برای هر نماد ثابت در زبان این دو ساخت مثل c داشته باشیم

$$.f(c^\alpha) = c^\beta$$

پس اگر ساخت جدید α/β را که اعضای آن در واقع توابع (روابطی) از α به β هستند در نظر بگیریم یعنی $|\alpha/\beta| = |\alpha| \times |\beta|$. ساخت α و β با هم یک ریختند اگر و فقط اگر تابعی چون f با خواص فوق در ساخت α/β موجود باشد. اگر وصل جملات ۱ تا ۳ را Ψ بنامیم، مسئله ی تصمیم گیری در مورد یک ریختی دو ساخت α و β در واقع تصمیم در مورد درستی جمله ی

$$\exists f \in \alpha/\beta \quad \Psi$$

است. چون جملات ۱ تا ۳ تصمیم پذیر هستند پس Ψ, Δ است و در نتیجه این مسئله طبق تعریف Σ_1 است.

قضیه ۱.۳.۳ مسئله ی یک ریختی دو گراف FA - نمایش پذیر Σ_1 - کامل است.

مشخص است که این مسئله Σ_1 است و فقط کافی است ثابت کنیم هر مسئله Σ_1 دیگر به این مسئله قابل تبدیل است. چون این مسئله در مورد گراف های FA - نمایش پذیر است و در واقع گرافی FA - نمایش پذیر است که گراف یک اتوماتون باشد پس می توان با الگوریتم های شناخته شده ای این دو گراف را به گراف هایی هم بند و بدون دور تبدیل نمود.

اثبات کامل این قضیه در مرجع [۱۴] آمده است. در آنجا الگوریتمی برای تبدیل مسئله پیشوند بودن دو دنباله از اعداد طبیعی که نوعاً مساله ای Σ_1 - کامل است، به مساله یک ریختی دو گراف F - نمایش پذیر، ارائه شده است.

فصل چهارم

ساختارهای جبری شبه متناهیاً اصل پذیر

۱.۴ گروه‌های شبه اصل پذیر

در این فصل ما قصد داریم روش دیگری را برای توصیف گروه‌ها بکار ببریم. برای ایجاد یک پس زمینه‌ی ذهنی، در این بخش ما در مورد این بحث می‌کنیم که به چه اندازه یک گروه متناهی المولد با نظریه‌ی مرتبه‌ی اولش مشخص می‌شود. $Th(G)$ یعنی تمام جملات درجه‌ی اولی که در گروه G درستند، شامل اطلاعاتی نظیر اینکه آیا G پوچ توان است یا بدون تاب است یا ... می‌باشد. ولی بسیاری از خصوصیات یک گروه در منطق درجه‌ی اول قابل فرمول بندی نیستند. برای مثال، متناهی المولد بودن، داشتن شرط ماکسیمم بودن (یعنی هر زیرگروه یک گروه مثل G ، متناهی المولد باشد) و ساده بودن، خصوصیات درجه اول از گروه G نیستند. یک خصوصیت درجه‌ی اول از گروهی مثل G با این حقیقت قابل تشخیص است که آیا آن خصوصیت ذاتی است یا خیر. به عبارت دیگر نمی‌توان از G بیرون رفت (از اعضایش و روابط مربوط به آن). از آنجا که خصوصیات نظیر ساده بودن یا متناهی المولد بودن به زیرمجموعه‌های G بستگی دارد، نمی‌توان در داخل G آنها را تحقیق نمود.

اگر G ، متناهی المولد و نامتناهی باشد تا چه اندازه G با $Th(G)$ مشخص می‌شود؟

به طور دقیق تر فرض کنید گروهی دیگر مانند $\mathcal{H}$ موجود باشد به طوری که متناهی المولد و نامتناهی باشد، اگر داشته باشیم $Th(G) = Th(\mathcal{H})$. چه شرط بیشتری لازم است تا حکم کنیم $\mathcal{H} \simeq G$.

تعریف ۱.۱.۴ گروه نامتناهی، متناهی المولد G شبه اصل پذیر است اگر و فقط اگر ThG ، G را بصورت منحصر به فرد اصل بندی نماید، یعنی اگر گروه نامتناهی و متناهی المولد دیگر چون $\mathcal{H}$ موجود باشد که $ThG = Th\mathcal{H}$ ، در این صورت حکم کنیم $\mathcal{H} \simeq G$.

توجه کنید که لغت « شبه » برای تأکید به شرایط اضافی است که روی اصل پذیری درجه‌ی اول یک گروه می‌گذاریم. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، خواص نامتناهی بودن یا متناهی المولد بودن گروهی مثل G ، خواص قابل بیان در منطق درجه‌ی اول نیستند. بنابراین این دو شرط را ما به عنوان پیش فرض تلقی می‌کنیم ولی بقیه اصولی که گروه G را با آنها توصیف می‌کنیم باید درجه‌ی اول باشند.

مثال ۲.۱.۴ هرگروه آبلی متناهی المولد بدون تاب، اصل پذیر متناهی است.

طبق قضیه رده‌بندی گروه‌های آبلی متناهی المولد هرگروه آبلی بدون تاب متناهی المولد به ازای n ای با $\mathbb{Z}^n$ ایزومورف است. اما همانطور که در قضیه ۱.۲.۱ در فصل مقدمات نشان داده شد که $\mathbb{Z}$ اصل پذیر است، تنها چیزی که $\mathbb{Z}^n$ را از $\mathbb{Z}$ متمایز می‌کند آن است که $|\frac{\mathbb{Z}^n}{2\mathbb{Z}^n}| = 2^n$ این خاصیت با جملات درجه‌ی اول زیر تعریف پذیر است

$$\{2G\} : \quad \exists y \quad x = y + y$$

$$\{\frac{G}{2G}\} : \quad x \in 2G \implies x = 0$$

$$|\frac{G}{2G}| = 2^n \quad \exists a_1 \quad \exists a_2 \dots \exists a_{2^n}.$$

$$\left(\begin{array}{l} (a_1 \neq a_2 \wedge a_1 = a_3 \wedge a_1 = a_4 \dots) \\ \wedge \quad (a_2 \neq a_3 \wedge a_2 = a_4) \\ \wedge \quad a_3 \neq a_4 \\ \vdots \\ \wedge \quad a_{2n-1} \neq a_{2n} \end{array} \right) \wedge \quad \forall y \quad \begin{array}{l} y = a_1 \vee \\ y = a_2 \vee \\ \vdots \\ y = a_{2n} \end{array}$$

مرکز گروهی مثل G عبارت است از مجموعه‌ی اعضای G که با هر عضو از G جابجا شوند یعنی

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \quad xy = yx\}$$

مشخص است که $Z(G)$ در G نرمال است، پس $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه است حال مرکز این گروه را در نظر بگیرید (یعنی $Z(\frac{G}{Z(G)})$). چون $Z(G)$ در G نرمال است پس همومورفیسم طبیعی چون $\gamma: G \rightarrow \frac{G}{Z(G)}$ با ضابطه‌ی $\gamma(a) = aZ(G)$ وجود دارد. نگاشت معکوس γ یعنی γ^{-1} نگاشتی است که عضو همانی گروه $\frac{G}{Z(G)}$ را به مجموعه‌ی $Z(G)$ می‌برد، پس $\gamma^{-1}(Z(\frac{G}{Z(G)}))$ یک زیر گروه از G است که $Z(G)$ در آن نرمال است این زیرگروه را با $Z_2(G)$ نشان می‌دهیم (یعنی $Z_2(G) = \gamma^{-1}(Z(\frac{G}{Z(G)}))$) با ادامه این کار به یک سری زیرنرمال از G دست پیدا می‌کنیم که به آن سری مرکز فزاینده‌ی G می‌گوییم و داریم

$$Z(G) = Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq Z_3(G) \dots$$

گروه G را پوچ توان از مرتبه‌ی n می‌نامیم اگر و فقط اگر $Z_n(G) = G$ مشخص است که هر گروه آبلی پوچ توان از مرتبه‌ی ۱ است چرا که مرکز این گروه، کل گروه است

$$(Z_1(G) = Z(G) = G)$$

مثال ۳.۱.۴ هر گروه بدون تاب پوچ توان از مرتبه‌ی ۲، اصل پذیر است.

بدون تاب بودن این گروه مانند آنچه در مثال قبل از فصل مقدمات یاد شد توسط مجموعه‌ی نامتناهی از جملات درجه‌ی اول به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\forall x \quad x \neq x^2$$

$$\forall x \quad x \neq x^3$$

$\vdots$

به علاوه پوچ توان بودن آن از مرتبه‌ی ۲ را می‌توان با جملات درجه‌ی اول زیر اصل بندی کرد

$$Z(G) : \quad \forall y \quad xy = yx$$

$$\frac{G}{Z(G)} : \quad \forall x \quad x \in Z(G) \implies x = \circ \quad \text{که در این جمله } x \in Z(G) \text{ در بالا تعریف شده است}$$

$$Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) : \quad \forall y \in \frac{G}{Z(G)} \quad xy = yx \quad \text{در این جمله نیز } x \in \frac{G}{Z(G)} \text{ در بالا تعریف شده است}$$

$$Z_r(G) = \gamma^{-1}\left(Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right) : \quad \forall y \in Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \quad \forall x \in Z(G) \quad z = x \cdot y$$

$$G = Z_r(G) : \quad \forall y \in G \quad \exists x \in Z_r(G) \quad x = y$$

در اینجا قضیه مهم زیر که حاصل کارهای هیرشون^۱ و اُجر^۲ که به ترتیب در مراجع [۶] و [۲۵] آمده‌اند، قابل ذکر است.

قضیه ۴.۱.۴

(I) هر گروه متناهی التولید و بدون تاب پوچ توان از مرتبه‌ی ۲، شبه اصل پذیر است.

(II) گروه‌های متناهی التولید و بدون تاب و پوچ توان از مرتبه ۳، مانند H و G چنان موجودند که دارای نظریه‌ی

یکسان هستند ولی با هم ایزومورف نیستند، یعنی $ThH = ThG$ ولی $G \not\cong H$.

اُجر در [۲۵] نشان داد که برای هر گروه متناهی التولید پوچ توان مثل G و H داریم:

$$Th(G) = Th(H) \iff G \times \mathbb{Z} = H \times \mathbb{Z} \quad (*)$$

^۱ Hirshon

^۲ Oger

قسمت ($\Leftarrow$) این قضیه در واقع برای هر گروه G و H درست است. سپس هریشون این پرسش را مطرح کرد که برای چه گروه‌هایی مثل A و B می‌توان قسمت $\mathbb{Z}$ را در حاصلضرب مستقیم که در رابطه‌ی $(*)$ آمده است حذف نمود بطوری که داشته باشیم:

$$ThA = ThB \implies A \simeq B$$

این مطلب برای هر گروه متناهی‌التولید بدون تاب و پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ درست است ولی همواره برای گروه‌های متناهی‌التولید بدون تاب و پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ درست نیست. توجه کنید که در قضیه ۴.۱.۴، قسمت I، شرط بدون تاب بودن ضروری است چرا که زیلبر^۳ در مرجع [۳۵] نشان داد که گروه‌های متناهی‌التولید و پوچ‌توان از مرتبه ۲ وجود دارند بطوری که $ThH = ThG$ ولی $G \not\simeq H$. با گسترش کارهای زیلبر، اُجر در مرجع [۲۴] نشان داد که دو گروه پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ و موضعاً آبلی متناهی زیر دارای نظریه‌های یکسانی هستند ولی با هم ایزومورف نیستند

$$G = \langle a, b \mid a^{25} = 1, d^{-1}ad = a^6 \rangle \quad \text{و} \quad H = \langle a, d \mid a^{25} = 1, d^{-1}ad = a^{11} \rangle$$

تعریف ۵.۱.۴ گروه‌های شبه متناهیاً اصل پذیر^۴

ساخت جبری G را شبه متناهیاً اصل پذیر (QFA) گوئیم اگر و فقط اگر شرایط زیر را داشته باشد

- ۱- این ساخت نامتناهی باشد. ۲- این ساخت متناهی‌التولید باشد.
- ۳- مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه اول در زبان این ساخت موجود باشند که این ساخت را بطور منحصر بفرد (در حد ایزومورفیسم) توصیف کنند یعنی مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه‌ی اول مثل Σ چنان موجود باشد که اولاً $\models_G \Sigma$ و درثانی اگر ساخت جبری دیگر چون $\mathcal{H}$ موجود باشد که $\models_{\mathcal{H}} \Sigma$ ، آنگاه $\mathcal{H} \simeq G$.

^۳ Zilber

^۴ Quasi - Finitely Axiomatizable Groups

مثال ۶.۱.۴ هیچ گروه آبدلی، QFA نیست.

طبق قضیه رده‌بندی گروه‌های آبدلی متناهی‌التولید، هر گروه آبدلی متناهی‌التولید آبدلی به فرم $A \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_r} \times \mathbb{Z}^n$ است. قبلاً نشان دادیم که $\mathbb{Z}^n$ اصل پذیر است، ولی اصل پذیر متناهی نیست پس اگر A شبه متناهیاً اصل پذیر باشد نمی‌تواند دارای مؤلفه‌ی بدون تاب باشد چرا که به ازای هر $\mathbb{Z}$ در حاصلضرب مستقیم خارجی بالا باید بگوییم x_1 ای در A وجود دارد که بدون تاب است یعنی $x_1 \neq x_1 + x_1$ و $x_1 \neq x_1 + x_1 + x_1$ و ... که تعداد نامتناهی جمله‌ی درجه اول را پدید می‌آورد. پس A نمی‌تواند شامل اعضای بدون تاب باشد از این رو A باید به شکل $A \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_r}$ باشد ولی این گروه گروهی متناهی است و ناقض شرط ۱ تعریف QFA بودن است. لذا هیچ گروه آبدلی، QFA نیست.

می‌دانیم که اگر برای دو کلاس از ساخت‌ها مثل C و D داشته باشیم $C \subset D$ آن‌گاه $ThD \subseteq ThC$ خواهد بود. پرسشی که این جا مطرح می‌شود این است که چه شرطی روی کلاس‌های C و D بگذاریم تا $ThD \subsetneq ThC$ شود؟ یعنی نظریه ساخت D ، زیرمجموعه‌ی سره‌ای از نظریه‌ی ساخت C شود.

قضیه ۷.۱.۴ (محک QFA) اگر ساخت جبری QFA ی G عضوی از $D - C$ باشد آن‌گاه $ThD \subset ThC$ خواهد بود.

چون طبق فرض G ساختی QFA است، پس مجموعه‌ای متناهی چون Σ آنرا اصل بندی می‌کند. جمله‌ی φ را وصل تمام جملات Σ (که تعداد آنها متناهی است) در نظر می‌گیریم، طبق فرض $G \in D - C$ یعنی $G \notin C$. بعلاوه برای هر ساخت مثل $\mathcal{M} \in C$ می‌دانیم که $Th\mathcal{M}$ نظریه‌ای تام است یعنی به ازای هر جمله‌ی درجه‌ی اول مانند σ یا $\sigma \models_{\mathcal{M}}$ و یا $\sigma \not\models_{\mathcal{M}}$. اما برای هر ساخت $\mathcal{M} \in C$ داریم $\mathcal{M} \models \sim \varphi$ چرا که اگر در ساختی مثل $\mathcal{M}$ جمله‌ی درجه‌ی اول φ درست باشد یعنی اگر (فرض خلف) برای ساختی چون $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi$ در این صورت طبق تعریف ساخت‌های QFA - خاصیت سوم - $\mathcal{M} \cong G$ ولی این خلاف فرض متعلق نبودن G به کلاس C است. پس فرض خلف باطل است و برای هر ساخت $\mathcal{M} \in C$ خواهیم داشت $\mathcal{M} \models \sim \varphi$. چون ThC مجموعه‌ی همه‌ی جملات درجه‌ی اولی است که در هر ساخت C صادق هستند پس $\varphi \in ThC$. واضح است که $\varphi \notin ThD$ چرا که اگر $\varphi \in ThD$ باشد (فرض خلف) باید در تمام ساخت‌های این کلاس درست

باشد. الالخصوص طبق فرض $G \in D$ و داریم $\models_G \varphi$ پس $\varphi \notin ThD \sim$. لذا مجموعه‌ی $ThC - ThD$ غیر تهی است و این بدان معناست که $ThD \subset ThC$.

۱.۱.۴ گروه‌های پوچ‌توان

اُجرو صَبّاق^۵ [۲۷] خاصیت QFA بودن را برای گروه‌های پوچ‌توان باروش‌های کاملاً جبری مشخص کردند. بطور غیر رسمی، گروه پوچ‌توان متناهی‌التولید G ، QFA است اگر و فقط اگر مرکز این گروه یعنی $Z(G)$ آنقدر بزرگ نباشد که نتوان آنرا تمیّز داد.

برای گروه G ، زیرگروه تولید شده توسط برگردان‌های گروه G را با G' نمایش می‌دهیم یعنی $G' = \langle \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G\} \rangle$. در این صورت $\Delta(G)$ که با $\Delta(G) = \{x \mid \exists m > 0 \text{ s.t. } x^m \in G'\}$ تعریف می‌شود، کوچکترین زیرگروه نرمالی از G است شامل تمامی عناصر تابدار G به انضمام همه‌ی برگردان‌های گروه G است یعنی $\overline{\Delta(G)}$ یک گروه آبلی بدون تاب خواهد بود.

قضیه ۸.۱.۴ فرض کنید G یک گروه متناهی‌التولید نامتناهی پوچ‌توان است. در این صورت، G ، QFA است اگر و فقط اگر $Z(G) \subset \Delta(G)$ باشد.

اثبات این قضیه در مرجع [۲۷] آمده است. در آنجا همچنین نشان داده شده که چون در هر گروه آبلی $Z(G) = G$ در صورتی که $\Delta(G)$ عبارتست از عناصر تابدار آن گروه آبلی که زیرگروهی متناهی است یعنی $Z(G) \not\subseteq \Delta(G)$ ، پس این گروه‌ها نمی‌توانند QFA باشند.

قضیه ۹.۱.۴ برای هر گروه متناهی‌التولید پوچ‌توان، احکام زیر معادلند:

$$Z(G) \not\subseteq \Delta(G) \quad (I)$$

G دارای زیرگروهی با اندیس متناهی در آن است که دارای مؤلفه‌ی ضرب مستقیم ایزومورف با $\mathbb{Z}$ است. (II)

^۵ Sabbagh

$I \Rightarrow II$ چون $Z(G) \not\subseteq \Delta(G)$ پس x ای در G وجود دارد که $x \in Z(G) - \Delta(G)$ باشد.

طبق آنچه گفته شد $\frac{G}{\Delta(G)}$ یک گروه آبلی بدون تاب است. علاوه بر این چون G متناهی المولد است پس $\frac{G}{\Delta(G)}$ نیز چنین خواهد بود و طبق قضیه‌ی رده‌بندی گروه‌های آبلی متناهی المولد داریم: $\frac{G}{\Delta(G)} \simeq \mathbb{Z}^m$. چون $x \notin \Delta(G)$ پس $x\Delta(G) \neq E$ که در آن E عضو خنثی عمل گروه $\frac{G}{\Delta(G)}$ است. پس مشخصاً زیرگروه تولید شده با این اعضا زیرگروهی از $\mathbb{Z}^m$ است. یعنی $\langle x\Delta(G) \rangle \leq \mathbb{Z}^m$.
 بعلاوه چون مؤلفه این زیرگروه تنها یک عضو است پس $\Delta(G) \simeq \mathbb{Z}$. $\langle x \rangle = \langle x\Delta(G) \rangle$ ، پس خواهیم داشت

$$\langle x \rangle = \mathbb{Z} \times \Delta(G) \leq G$$

پس G دارای زیرگروهی چون $\langle x \rangle$ است که دارای مؤلفه‌ی ضرب مستقیمی، ایزومورف با $\mathbb{Z}$ است.

اثبات $II \Rightarrow I$ فرض کنیم G دارای زیرگروهی با مؤلفه‌ی ضرب مستقیم ایزومورف با $\mathbb{Z}$ باشد یعنی $\mathcal{H} \simeq K \times \mathbb{Z} \leq G$. طبق فرض مجموعه‌ی مولدهای G متناهی است. لذا مجموعه‌ی مولدهای $\mathcal{H}$ نیز که زیرگروهی از G است، زیرمجموعه‌ای از مولدهای G است و متناهی است. اما حداقل یکی از این مؤلفه‌ها بدون تاب است چرا که $\mathcal{H} \simeq K \times \mathbb{Z}$ است. این مولد بدون تاب مثل (a) حتماً در مرکز G هست یعنی $a \in Z(G)$ ولی در $\Delta(G)$ نمی‌تواند باشد چرا که $\Delta(G)$ تولید شده توسط برگردان‌ها به انضمام عناصر تابدار G هستند پس $Z(G) \not\subseteq \Delta(G)$.

۲.۱.۴ حلقه‌های QFA

قضیه ۱۰.۱.۴ $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ، QFA است.

توجه کنید که اعداد مثبت در $\mathbb{Z}$ قابل تعریف اند. چرا که هر عدد مثبت حاصلجمع چهار مربع کامل است پس

$$x \in \mathbb{N} : \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 \quad x = y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4$$

و به علاوه ترتیب در $\mathbb{Z}$ قابل تعریف است

$$x \geq y \iff \exists z \in \mathbb{N} \quad x = y + z$$

که در این جمله $z \in \mathbb{N}$ بودن، در بالا تعریف شده است.

و نیز تابع فاکتوریل برای هر عدد طبیعی قابل تعریف است

به طور مشخص اصول متناهی را که می‌خواهیم $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک حلقه‌ی نامتناهی‌التولید با آنها توصیف کنیم،

بصورت زیرند:

دسته اول) اصول موضوعه‌ی حلقه‌های ۱ دار و جابجایی

$$\forall x \forall y \forall z \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\exists \circ \forall x \quad x + \circ = x$$

$$\forall x \exists (-x) \quad x + (-x) = \circ$$

$$\forall x \exists y \quad x + y = y + x$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad z \times (x + y) = (z \times x) + (z \times y) \wedge (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

$$\exists 1 \forall y \quad 1 \times y = y$$

$$\forall x \forall y \quad x \times y = y \times x$$

دسته دوم) تعریف رابطه‌ی ترتیب و خالی بودن بازه‌ی $(\circ, 1)$:

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x \geq y \wedge y \geq z) \implies x \geq z$$

$$\forall x \forall y \quad (x \geq y \vee y \geq x)$$

$$\forall x \forall y \quad (x \geq y \wedge y \geq x) \implies x = y$$

$$\forall x \quad (x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \leq 1) \implies x = 1$$

دسته سوم) تعریف بازگشتی از تابع فاکتوریل:

$$\forall x > 0 \quad f(x) > 0 \wedge f(0) = 1$$

$$f(x+1) = (x+1) \times f(x)$$

حال ثابت می‌کنیم اگر حلقه‌ی نامتناهی متناهی‌التولید دیگری مثل $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که جملات این بند همه در آن درست باشند، آن‌گاه $\mathbb{Z}$ با ایزومورف است.

بر خلاف فرض کنید حلقه‌ی نامتناهی و متناهی‌المولدی چون $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که هر سه دسته جملات فوق‌الذکر در آن درست باشند ولی $\mathcal{H}$ با $\mathbb{Z}$ ایزومورف نباشد. چون $\mathcal{H} \not\cong \mathbb{Z}$ پس این حلقه دارای عنصر غیر استاندارد c است که از هر عددی مثل $\underline{n}$ عضو این حلقه بزرگتر است (توجه کنید که اعداد $\underline{n}$ در این حلقه با $\underline{n} = 1_{\mathcal{H}} + 1_{\mathcal{H}} + 1_{\mathcal{H}} + \dots$ (n بار) مشخص می‌شوند) یعنی $c > \underline{n} \quad \forall \underline{n} > 0$. طبق دسته‌ی سوم از اصول موضوعه این حلقه به ازای هر عدد بزرگتر از صفر مثل r داریم $f(r) \mid f(r-1)$. بالاخص برای عنصر غیراستاندارد c داریم $f(c) \mid f(c-n)$. بعلاوه برای هر دو عضو $\underline{r}_1$ و $\underline{r}_2$ از $\mathcal{H}$ داریم $\underline{r}_2 \mathcal{H} \leq \underline{r}_1 \mathcal{H} \Rightarrow \underline{r}_1 \mid \underline{r}_2$. زنجیره‌ی زیر از زیر حلقه‌های $\mathcal{H}$ را در نظر بگیرید:

$$f(c) \times \mathcal{H} \leq f(c-1) \times \mathcal{H} \leq \dots$$

چون به ازای هر عدد $\underline{n}$ ، $c - \underline{n} > 0$ پس این زنجیره نامتناهی است. اما می‌دانیم که هر حلقه متناهی‌التولید نوتری است یعنی زنجیره‌ی ایده‌آل‌های آن از بالا کران دار است ولی ما (با فرض عنصر غیراستاندارد c در $\mathcal{H}$) زنجیره‌ای از ایده‌آل‌های آن را بدست آوردیم که از بالا کراندار نیست و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و $\mathcal{H}$ با $\mathbb{Z}$ ایزومورف است.

مراجع

- [١] S. Akiyama, C. Frougny, and J. Sakharovitch, *Powers of rationals modulo 1 and rational base systems*, preprint, 2005.
- [٢] A. Blumensath and E. Gradel, *Finite presentations of infinite structures: automata and interpretations*, **Theory of Computing Systems**, vol. 37 (2004), pp. 641-674.
- [٣] J. Cannon et al., **Word processing in groups**, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [٤] L. Fuchs, **Infinite Abelian groups**, vol. 2, Academic Press, 1973.
- [٥] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, **Publications Mathematiques IHE'S**, vol. 53 (1981), pp. 53-78.
- [٦] R. Hirshon, *Some cancellation theorems with applications to nilpotent groups*, **Journal of Australian Mathematical Society (series A)**, vol. 23 (1977), pp. 147-165.
- [٧] W. Hodges, **Model Theory**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [٨] B. R. Hodgson, **Theories decidables par automate fini**, Ph.D. thesis, University of Montreal, 1976.
- [٩] B. R. Hodgson, *Theories decidables par automate fini*, **Annales des Sciences Mathematiques du Quebec**, vol. 7 (1983), pp. 39-57.

- [10] M. Kargapolov and J. Merzljakov, **Fundamentals of the theory of groups**, Springer-Verlag, 1979.
- [11] R. Kaye, **Models of Peano Arithmetic**, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [12] A. Khelif, *Bi-interpretabilite et structures QFA: etude des groupes resolubles et des anneaux commutatifs*, *Comptes Rendus Mathematique*, Vol. 345, No. 23 (2007), pp. 59-61.
- [13] B. Khoussainov and A. Nerode, *Automatic presentations of structures*, **Logic and computational complexity (D. Leivant, editor)**, **Lecture Notes in Computer Science**, vol. 960, Springer-Verlag, 1995, pp. 367-392. DESCRIBING GROUPS 339
- [14] B. Khoussainov, A. Nies, S. Rubin, and F. Stephan, *Automatic structures: richness and limitations*, **Proceedings of the 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science**, Springer-Verlag, 2004, pp. 110-119.
- [15] S. Lang, **Algebra**, Addison-Wesley, 1965.
- [16] A. Mal'cev, *On a correspondence between rings and groups*, **American Mathematical Society Translations**, vol. 45 (1965), pp. 221-231.
- [17] A. Morozov and A. Nies, *Finitely generated groups and first-order logic*, **Journal of the London Mathematical Society**, vol. 71 (2005), no. 2, pp. 545-562.
- [18] A. Nies, *Aspects of free groups*, **Journal of Algebra**, Vol. 263 (2003), pp. 119-125.
- [19] A. Nies, *Separating classes of groups by first-order formulas*, **International Journal of Algebra and Computation**, vol. 13 (2003), pp. 287-302.
- [20] A. Nies, *Comparing quasi-finitely axiomatizable groups and prime groups*, **Journal of Group Theory**, Vol. 10, No. 3, (2007), pp. 347-361.
- [21] A. Nies and P. Semukhin, *Finite automaton presentable abelian groups*, **Proceedings of LFCS 2007**, LNCS 4514, (2007), pp. 422-436.

- [12] A. Nies and R. Thomas, *Finite automaton presentable groups and rings*, **Journal of Algebra**, Vol. 320, (2008), pp. 569-585.
- [13] G. A. Noskov, *The elementary theory of a finitely generated almost solvable group*, **Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematika**, vol. 47 (1983), no. 3, pp. 498-517.
- [14] F. Oger, *Equivalence elementaire entre groupes finis-par-abeliens de type fini*, **Commentarii Mathematici Helvetici**, vol. 57 (1982), no. 3, pp. 469-480.
- [15] F. Oger, *Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent groups*, **Journal of the London Mathematical Society**, vol. 30 (1991), pp. 293-299.
- [16] F. Oger, *Quasi-finitely axiomatizable groups and groups which are prime models*, **Journal of Group Theory**, vol. 9 (2006), no. 1, pp. 107-116.
- [17] F. Oger and G. Sabbagh, *Quasi-finitely axiomatizable nilpotent groups*, **Journal of Group Theory**, vol. 9 (2006), no. 1, pp. 95-106.
- [18] G. P. Oliver and R. M. Thomas, *Automatic presentations for finitely generated groups*, **STACS 2005** (V. Diekert and B. Durand, editors), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3404, Springer-Verlag, 2005, pp. 693-704.
- [19] D. Robinson, **A course in the theory of groups**, Springer-Verlag, 1988.
- [20] B. I. Zilber, *An example of two elementarily equivalent but not isomorphic finitely generated metabelian groups*, **Algebra i Logika**, vol. 10 (1971), pp. 309-315.
- [21] T. Scanlon, *Infinite finitely generated fields are bi-interpretable with N* , **Journal of the AMS**, Vol. 21, (2008), pp. 893-908.
- [22] J. Silver, *Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations*, **Annals of Pure and Applied Logic**, vol. 18 (1980), pp. 1-28.

- [٢٣] M. Sipser, **Introduction to the theory of computation**, PWS Publishing Company, 1997.
- [٢٤] W. Thomas, *Automata on infinite objects*, **Handbook of theoretical computer science** (Jan van Leeuwen, editor), vol. A, Elsevier Science Publishers B.V., 1990, pp. 135-186.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

FA-presentable	— FA نمایش پذیر
automaton	اتوماتون
buchi automaton	اتوماتون بوخی
finite automaton	اتوماتون متناهی
nondeterministic finite automaton	اتوماتون نامتناهی غیر قطعی
deterministic finite automaton	اتوماتون متناهی قطعی
axiomatizable	اصل پذیر
torsion free	بدون تاب
epimorphism	بروریکتی
language parameters	پارامترهای زبان
complexity	پیچیدگی
torsion	تاب
transition function	تابع انتقال
restriction	تحدید
decidable	تصمیم پذیر
interpretable	تعبیر پذیر
definable	تعریف پذیر
monomorphism	یکریختی

extension	توسیع
well-founded sentence	جمله‌ی خوش ساخت
state	وضعیت (حالت)
initial state	وضعیت اولیه
acception state	وضعیت پذیرش نهایی
rejection state	وضعیت رد نهایی
final state	وضعیت نهایی
integral domain	حوزه صحیح
unity integral domain	حوزه صحیح یک‌دار
query evaluation property	خاصیت تفحص در ارزیابی
recursive relation	رابطه بازگشتی
effective way	روش کارآمد
language	زبان
regular language	زبان منظم
commutator subgroup	زیر گروه برگردانها
structure	ساخت
arithmetical hierarchy	سلسله مراتب حسابی
quasi finitely axiomable	شبه متناهیاً اصل پذیر
recursively enumerable	شمارش پذیر بازگشتیانه
weakly FA-representable	ضعیفاً FA—نمایش پذیر
theorem	قضیه
class n nilpotent group	گروه پوچ توان مرتبه n
embed	گنجانیدن
pumping lemma	لم تزریق

maximal	ماکسیمال
finitely generated	متناهیاً تولید شده
finitely axiomatizable	متناهیاً اصل پذیر
center of a group	مرکز یک گروه
word problem	مساله کلمه
first order logic	منطق محمولات درجه اول
abelian-by-finite	موضعیاً آبلی متناهی
nilpotent-by-finite	موضعیاً پوچ توان متناهی
theory	نظریه
signature	نماد
predicate symbols	نمادهای محمولی
logical symbols	نمادهای منطقی
representation	نمایش
homomorphism	همریختی
isomorphism	یکریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

موضعاً آبدلی متناهی	abelian-by-finite
وضعیت پذیرش نهایی	acception state
سلسله مراتب حسابی	arithmetical hierarchy
اتوماتون	automaton
اصل پذیر	axiomatizable
اتوماتون بوخی	buchi automaton
مرکز یک گروه	center of a group
گروه پوچ توان مرتبه n	class n nilpotent group
زیر گروه برگردانها	commutator subgroup
پیچیدگی	complexity
تصمیم پذیر	decidable
تعریف پذیر	definable
اتوماتون متناهی قطعی	deterministic finite automaton
روش کارآمد	effective way
گنجانندن	embed
برورختی	epimorphism
توسیع	extension
FA —نمایش پذیر	FA-presentable

متناهیاً تولید شده	finitely generated
وضعیت نهایی	final state
اتوماتون متناهی	finite automaton
متناهیاً اصل پذیر	finitely axiomatizable
منطق محمولات درجه اول	first order logic
همریختی	homomorphism
وضعیت اولیه	initial state
حوزه صحیح	integral domain
تعبیر پذیر	interpretable
یکریختی	isomorphism
زبان	language
پارامترهای زبان	language parameters
نمادهای منطقی	logical symbols
ماکسیمال	maximal
تکریختی	monomorphism
موضعیاً پوچ توان متناهی	nilpotent-by-finite
اتوماتون نامتناهی غیر قطعی	nondeterministic finite automaton
نمادهای محمولی	predicate symbols
لم تزریق	pumping lemma
شبه متناهیاً اصل پذیر	quasi finitely axiomable
خاصیت تفحص در ارزیابی	query evaluation property
رابطه بازگشتی	recursive relation
شمارش پذیر بازگشتیانه	recursively enumerable
زبان منظم	regular language

وضعیت رد نهایی.....	rejection state
نمایش.....	representation
تحدید.....	restriction
نماد.....	signature
وضعیت (حالت).....	state
ساخت.....	structure
نظریه.....	theory
قضیه.....	theorem
تاب.....	torsion
بدون تاب.....	torsion free
تابع انتقال.....	transition function
حوزه صحیح یکدار.....	unity integral domain
ضعیفاً FA —نمایش پذیر.....	weakly FA-representable
جملات خوش ساخت.....	well-founded sentence
مساله کلمه.....	word problem

Abstract

The goal of this thesis is to study the finite ways of describing an arbitrary group uniquely up to isomorphism. To approach this goal, we considered two ways: 1. A group is finite-automaton presentable if its elements can be represented by strings over a finite alphabet, in such a way that the set of representing strings and the group operation can be recognized by a finite automaton.

2. An infinite finitely generated group is quasi-finitely axiomatizable if there is a first order sentence in its language that describes it uniquely up to isomorphism.

In this thesis, we try to clarify the necessary notations and concepts like finite automata and some logical tools. We also discuss about some restrictions and complexities of the above two ways. The main source of this thesis is the paper:

André Nies, Describing Groups, The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 13, Number 3, Sept. 2007, 305-339.



**Institute for Advanced Studies
in Basic Sciences**
Gava Zang, Zanjan, Iran

A Study of Algebraic Structures By Logical Tools

Master Thesis

Farzad Elmi

Supervisors: Dr. Saeed Salehi

Dr. Rashid ZareNahandi

October 2010